

MODELO DE AGREGACIÓN GLOBAL DE RIESGOS PARA INSTITUCIONES BANCARIAS

Adán Díaz Hernández*

Departamento de Finanzas y Contabilidad, Tecnológico de Monterrey
Campus Ciudad de México

(Recibido 13 de junio 2011, aceptado 27 de julio 2011)

Resumen

El documento plantea una metodología para estimar el capital económico total de una institución financiera bancaria utilizando una medida de capital en riesgo "diversificada" por unidad de negocio y tipo de riesgo. El modelo propuesto se puede caracterizar como una metodología híbrida que incluye componentes de riesgo de crédito, mercado y operacional. Los ingredientes centrales del enfoque propuesto se basan en el uso de estructuras de dependencia (cópulas) para capturar las interacciones entre factores de riesgo en un contexto multivariado, el modelado y la agregación de series de tiempo con distintas frecuencias, y la capacidad de incorporar los efectos conjuntos sobre las pérdidas del portafolio y los riesgos considerados. El modelo está estructurado en cuatro etapas principales: 1) los rendimientos diarios de los factores de riesgo de mercado se describen mediante modelos de series de tiempo, cuya distribución incondicional de los errores es una t de Student; 2) los parámetros de riesgo de crédito están correlacionados con las variables de mercado, sobre una base anual, a través de cópulas elípticas de la familia t de Student; 3) la distribución de pérdidas para los tipos de riesgo considerados son determinadas por funciones no lineales de los factores de riesgo; y 4) a horizonte anual, las pérdidas por riesgo operacional se simulan condicional a las pérdidas por riesgo de mercado y crédito.

Abstract

This paper poses a methodology to estimate the total economic capital for a banking institution by using a diversified risk capital measure by business line and type of risk. The proposed model can be characterized as a hybrid approach which includes components for market, credit and operational risk. The central ingredients of the approach rely on the use of dependence structures (copulas) to capture the interactions between risk factors in a multivariate context, the modeling and time series aggregation for different frequencies, and the ability to incorporate joint effects on the portfolio losses and the considered risks. The approach is structured on four main stages: 1) the daily returns of market risk factors are described through time series models whose innovations are Students t -distributed; 2) credit risk parameters are correlated with market variables on annual basis through elliptical copulas from Student's t -family; 3) the loss distributions for the considered risk types are determined by non-linear functions of the risk factors; and 4) on a yearly basis, operational losses are simulated conditional to market and credit losses.

Clasificación JEL: G19, C15, C22

Palabras clave: Agregación de riesgos, Capital económico, Cópulas elípticas, GARCH.

* Departamento de Contabilidad y Finanzas, ITESM, Campus Ciudad de México. Edificio 2 2do Piso Calle del Puente No 222. Col Ejidos de Huipulco, C.P 14380 México D. F. Correo electrónico: adan.diaz@itesm.mx

El autor desea agradecer a dos dictaminadores anónimos sus valiosas observaciones.

1. Introducción

Para apoyar las decisiones de la alta dirección concernientes a la administración del capital y su asignación, es necesario tener una medida integrada de riesgo. La agregación de riesgos se puede definir como la determinación de medidas cuantitativas que incorporan múltiples fuentes de riesgo. Durante los últimos años, los esfuerzos estuvieron centrados en el desarrollo de modelos de riesgo de crédito y sistemas de calificación internos, en cierta medida como consecuencia de la fase medular de los Nuevos Acuerdos de Basilea (Basilea II).¹ Sin embargo, en la actualidad, el tema de agregación comienza a reconocerse como punto crucial tanto para los bancos como para las autoridades regulatorias. La agregación de riesgos y el grado de los beneficios de diversificación que resultan de la exposición a los diferentes tipos de riesgo en los diferentes negocios, es relevante tanto desde el punto de vista de la regulación como de un banco individual.

Desde el punto de vista del negocio, entender la forma en que se agregan los riesgos y, en consecuencia, el beneficio por diversificación, resulta un componente extremadamente importante para los procesos de toma de decisiones bajo una perspectiva de capital económico (CE). De acuerdo con Dev (2004), entre los beneficios que tiene la institución bajo este contexto se encuentran: medición del riesgo a nivel global, por línea de negocio y tipo de riesgo; uso y asignación eficiente del capital a lo largo de toda la institución y sus unidades, procesos, productos y líneas de negocio; medición del desempeño y alineación de incentivos, entre otros.

La elección de la medida de agregación no significa, empero, el fin del problema de su estimación sino su inicio. Aún con el fin de poder ser consistente para dar sustento a las decisiones sobre el nivel óptimo de capital de un banco, el administrador de riesgos debe estar en un escenario ideal en donde (1) se realice la medición de todos los riesgos, (2) todas las mediciones se lleven a cabo de una manera consistente y homogénea, (3) exista una metodología clara de “mejores prácticas” para estimar medidas de CE. Desafortunadamente, ninguno de estos supuestos se cumple en su totalidad. De hecho, no todos los riesgos se miden de manera consistente en los bancos, y ante la heterogeneidad de las medidas de riesgo utilizadas, es necesario armonizarlos.

La literatura reciente cuenta con muy pocos trabajos que estudien el enfoque de agregar los diferentes tipos de riesgos marginales al riesgo total. Matten (2000) es uno de los primeros en plasmar la importancia de desarrollar una medida general del capital en riesgo combinado con diferentes tipos de riesgo,

¹ En diciembre de 2010 el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (BCBS, por sus siglas en inglés) publicó las reglas y análisis de impacto cuantitativo del nuevo estándar regulatorio global en materia de capitalización y liquidez bancarios (Basilea III), desarrollado en respuesta a las deficiencias en regulación financiera que evidenció la actual crisis financiera global. En el sector bancario mexicano, las instituciones y el regulador local han adoptado gran parte de los lineamientos de Basilea II, los cuales se pueden consultar en BCBS (2004). www.bis.org.

adoptando una perspectiva pragmática del punto de vista interno de un banco. Estudios más recientes se han enfocado en las mejores prácticas en cuanto a la agregación de riesgos (BCBS-Joint Forum, 2003)² y se han propuesto técnicas de agregación (Alexander et al. 2003; Dimakos et al. 2003; Pezier 2003).

El presente documento está organizado de la siguiente manera. En la primera sección se describe el enfoque de agregación a seguir así como el detalle de la metodología propuesta. En la segunda sección se describe el portafolio base para el ejercicio empírico y se presentan los principales análisis realizados a cada serie de datos. En la tercera sección se presentan los resultados obtenidos por tipo de riesgo y productos, así como por líneas de negocio. Los resultados obtenidos se comparan con ejercicios alternativos que consideran el uso de las cópulas gaussiana y *t* de Student simétrica. Finalmente, en la cuarta sección se consolidan las conclusiones obtenidas.

Las conclusiones centrales indican que las cópulas agrupadas del tipo *t* de Student ofrecen mejores resultados en la modelación del comportamiento de las pérdidas extremas que cualquier otra estructura de dependencia comúnmente utilizada en finanzas, como es el caso de la cópula gaussiana y la de independencia, y más aún, presentan una ventaja sobre la *t* simétrica, las cuales permiten caracterizar comportamientos de pérdidas extremas diferenciados entre productos y líneas de negocio.

2. Modelo de agregación

Los enfoques empleados para combinar la distribución de riesgos marginales en una distribución de riesgo total se dividen en dos categorías principales: métodos de agregación ascendente (bottom-up) y descendente (top-down). En el enfoque de agregación ascendente, la idea consiste en identificar los factores de riesgo económico que tienen más influencia estadística sobre los diferentes tipos de riesgo y desarrollar un modelo simultáneo para esos factores, contrario al segundo enfoque en el que los riesgos se modelan conjuntamente a nivel de distribuciones de pérdida (Saita, 2007). La metodología propuesta en este documento para resolver el problema de agregación de riesgos es una mezcla de ambos enfoques. Se calibra un modelo simultáneo para los factores de riesgo de mercado y crédito que permite describir su estructura de dependencia a través de una cópula. Condicional a las pérdidas anuales simuladas de estos dos riesgos, se simulan las correspondientes pérdidas por riesgo operacional. Las agregaciones entre riesgos se llevan a cabo a nivel de línea de negocio y portafolio, y finalmente, la cola de las distribuciones de pérdidas se modela con una distribución Pareto generalizada a fin de poder estimar las medidas de Valor en Riesgo (VaRq) para el nivel de confianza elegido por la institución.³

Las pérdidas relacionadas a los diferentes tipos de riesgo se determinan a través de funciones no lineales de las fluctuaciones de los factores de riesgo.

² Más recientemente, el BCBS publicó en 2010 un documento con los avances y tendencias más recientes en materia de agregación de riesgos (ver BCBS-Joint Forum, 2010 en www.bis.org)

³ Para el ejercicio empírico desarrollado en este documento, se utiliza un nivel de confianza del 99.5%, que corresponde a una calificación crediticia AAA local.

Las distribuciones marginales de pérdida están correlacionadas indirectamente a través de la relación existente entre los factores de riesgo.

Por sus bondades ampliamente exploradas en la literatura, se elige la familia t de Student como especificación de las dos cópulas multivariadas utilizadas, a saber, las elípticas y las de mezcla Normal agrupadas. El uso de la cópula t agrupada permite describir comportamientos de dependencia extrema conjunta por tipo de riesgo y línea de negocio.⁴

El enfoque de agregación híbrido que se describe en este apartado contempla la calibración de un modelo simultáneo para los factores de riesgo de mercado y crédito que permite describir su estructura de dependencia a través de una cópula. Condicional a las pérdidas anuales simuladas de estos dos riesgos, se simulan las correspondientes pérdidas por riesgo operacional. Las agregaciones entre riesgos se llevan a cabo a nivel de línea de negocio y portafolio, y finalmente, la cola de las distribuciones de pérdidas se modela ajustando una distribución Pareto generalizada a fin de poder estimar el CE. La inclusión de alguna estructura de dependencia para modelar los factores de riesgo conjuntamente (ascendente) y las distribuciones de las pérdidas a nivel portafolio (descendente) nos permite utilizar modelos de series de tiempo y regresión por factores (o componentes principales), según sea tipo y frecuencia de los factores de riesgo que afectan a cada portafolio, línea de negocio y tipo de riesgo.

2.1 Algoritmo de simulación

El modelo de agregación de riesgos está definido por los modelos para los distintos componentes de riesgo y las relaciones que existen entre ellos. Dado que bajo el contexto del modelo planteado no es posible derivar una fórmula explícita y analítica para la distribución total de las pérdidas, las realizaciones de las mismas se generan mediante técnicas de Simulación Monte Carlo de los componentes de riesgo. Las distribuciones individuales, así como la distribución de la suma (*i.e.* el riesgo total) fueron obtenidas generando un número suficiente de escenarios para cada tipo de riesgo.

Con respecto a los dos enfoques principales de agregación de riesgos, se utilizó el método de agregación ascendente para combinar los riesgos de mercado y de crédito. Para el riesgo operacional no existen factores de riesgo explícitos, por lo que, este tipo de riesgo está ligado al enfoque de la distribución de las pérdidas, es decir, se sigue el enfoque descendente.

El horizonte de tiempo que se utilizó fue de un año, que es la convención para asignar el CE estándar en los bancos. Debido a ello, el objetivo final fue obtener una distribución para las pérdidas totales en un año. Sin embargo, para llegar a este punto, fue apropiado comenzar con modelos de alta frecuencia para el riesgo de mercado. Por lo tanto, fueron necesarios dos modelos para agregar

⁴ Para una revisión del concepto general de cópulas, sus propiedades y aplicaciones en el área de las finanzas y riesgos, se recomienda al lector revisar Embrechts *et al.* (2005). Específicamente, la estimación de la cópula t Agrupada se puede revisar en Kostadinov (2005) y Díaz *et al.* (2009).

el riesgo de mercado y de crédito. El primer modelo correlaciona los factores de riesgo de mercado con una periodicidad diaria, mientras que el segundo modelo describe la estructura de correlación entre esos factores de riesgo agregados a una frecuencia anual, junto con los factores de riesgo de crédito anuales.

A continuación se presenta un bosquejo general del procedimiento completo para determinar la distribución de pérdidas totales bajo este enfoque de agregación de riesgos.

- Ag1. Simulación de las realizaciones correlacionadas de los factores de riesgo de mercado fM_j (frecuencia diaria);
- Ag2. Condicionado a las realizaciones anuales del paso anterior,
 - Ag2.1 Simular $\overline{PD}^*$ así como los parámetros de riesgo PD_i , EAD_i y LGD_p asociados a cada cubeta⁵ del portafolio de créditos de personas físicas;
 - Ag2.2 Simular el parámetro PD_k y el índice Y_k del sector k correspondiente para cada posición del portafolio de créditos a personas morales;
- Ag3. Condicionado a las realizaciones anuales de los factores de mercado y las de los parámetros de riesgo del portafolio de créditos,
 - Ag3.1 Simular las pérdidas (anuales) por riesgo de mercado de las posiciones;
 - Ag3.2 Simular las pérdidas (anuales) por riesgo de crédito de las posiciones;
- Ag4. Simulación de las pérdidas operacionales anuales condicionadas a las distribuciones de pérdida por riesgo de mercado y crédito;
- Ag5. Cálculo de las pérdidas totales anuales como la suma de las pérdidas de mercado, crédito y operacional.

Para realizar la implementación del algoritmo planteado en la aplicación empírica de este documento, fue necesario desarrollar rutinas y programas computacionales en el software matemático MATLAB con uso de código en C para acelerar los procesos de cálculo.

Las fases del algoritmo anterior se llevan a cabo mediante la aplicación de varios procedimientos que se describen en cada uno de los enfoques por tipo de riesgo que abajo se detallan.

⁵ Como se detalla más adelante, en este documento, el término cubeta se utiliza para referirse a un conjunto de créditos con perfil de riesgo similar. Asimismo, PD_i denota la probabilidad de incumplimiento de la cubeta i , en tanto que EAD_i se refiere a su correspondiente exposición al incumplimiento. Por su parte, LGD_p denota la pérdida dado el incumplimiento a nivel de producto p .

2.2 Enfoque de mercado

El riesgo de mercado es una consecuencia de las posiciones abiertas de la institución financiera en los mercados de capital, tasas de interés y tipos de cambio. Típicamente se mide con el VaR_q sobre un horizonte diario.⁶

Es necesario escalar el riesgo de mercado a un horizonte de tiempo de un año para que sea consistente con los otros tipos de riesgo capturados por el enfoque de CE del modelo propuesto. Una estrategia de escalamiento comúnmente utilizada en la industria financiera consiste en multiplicar la medida de riesgo de un período base de cálculo por la raíz cuadrada del número de periodos que se desea proyectar.⁷ Sin embargo, este enfoque simple supone que los cambios en el valor del portafolio son independientes e idénticamente distribuidos bajo la distribución Normal, y que el portafolio es re balanceado continuamente para mantener constante su composición. De acuerdo con la evidencia empírica sobre el comportamiento de los activos financieros (hechos estilizados), estos supuestos pueden suen ser poco realistas, y no toman en cuenta las políticas de intervención de la administración tales como la fijación de límites sobre las pérdidas, las cuales pueden restringir de manera sustancial el efecto acumulativo de las pérdidas en un escenario severo a la baja.

Atendiendo estas deficiencias, en este trabajo de investigación se propone otro enfoque que incluye la influencia de una administración activa. Se incorpora el hecho de que las pérdidas intermedias pueden ocurrir para evitar el riesgo de grandes pérdidas fijando un período de liquidación para cada posición. Además, es claro que la liquidez de los instrumentos de inversión varía considerablemente, y esto se enfrenta permitiendo períodos de liquidación de diferente longitud.

Procedimiento 1

Para el caso de los derivados de tasa de interés (incluidos los bonos) los factores de riesgo de mercado que afectan nuestro portafolio son las estructuras de plazos de las tasas de CETES, BANCARIO, REPOG1, REPOB1, IRS, REAL, CALIF C, CALIF B, CALIF AAA. Para cada una de las curvas de tasas de interés anteriores se determinan dos nodos principales (los plazos 30 y 720) que al interior de cada curva permitirán modelar el resto de los nodos (1, 90, 180, 270, 360 y 1080) ajustando un modelo de factores donde los nodos principales son los factores comunes para el resto de nodos.

Por su parte, para los instrumentos que son derivados de acciones y tipo de cambio, los correspondientes factores de riesgo son las curvas LIBOR y UMS, así como el FIX e IPC. Para las dos primeras se sigue el procedimiento de

⁶ Para propósitos de requerimientos de capital bajo modelos internos, el BCBS especifica el uso de un horizonte de 10 días, suponiendo que la liquidez del mercado siempre es suficiente para permitir que las posiciones se cierren con pérdidas mínimas

⁷ De acuerdo con esta regla de "la raíz cuadrada", si el VaR_q se calcula sobre un horizonte de 10 días, entonces el factor de escalamiento está dado por la raíz cuadrada de 25 (suponiendo que existen 250 días de negociación en un año).

calibrar un modelo de factores para los nodos (1, 90, 180, 270, 360 y 1080) y cuyos factores son los nodos principales.

Los rendimientos de los nodos principales de las curvas empleadas, así como los del FIX e IPC, son filtrados mediante modelos ARMA-GARCH (ya sea en versiones univariadas y multivariadas). A las variables no observables de los procesos de ruido blanco obtenidos para todas las series se les ajusta alguna estructura de dependencia multivariada (cópula) de la cual se simulan observaciones que permiten obtener trayectorias anuales del FIX e IPC así como de cada uno de los nodos principales. Las observaciones simuladas de los nodos principales sirven para evaluar en cada grupo de nodos (curva) el modelo de dos factores ajustado, junto con realizaciones de ruido blanco correspondientes al modelo de factor, para obtener también trayectorias anuales de los nodos no principales. Con este procedimiento se realizan las simulaciones del paso Ag1.

Las trayectorias anuales de los rendimientos de los factores de riesgo de mercado permiten obtener las realizaciones anuales δ^j por riesgo de mercado del paso Ag2.

Con cada simulación anual δ^j se obtiene el nivel simulado correspondiente $FM_j = r_0^j e^{\delta^j}$, donde r_0 denota al valor de mercado actual del factor de riesgo. Esto se hace para todos los factores de mercado, creando así escenarios conjuntos de realizaciones de factores de mercado. La revaluación del portafolio actual en cada escenario produce valores simulados del portafolio y su distribución subyacente es justamente la distribución de pérdidas por riesgo de mercado del portafolio en cuestión. Este procedimiento permite realizar el paso Ag3.1

2.3 Enfoque riesgo de crédito

La metodología aplicada a los portafolios de créditos a empresas, considera una versión simple del modelo de umbral tipo KMV/CreditMetrics con cópula gaussiana (ver Embrechts, 2005). Específicamente, dicha metodología es aplicable tanto al portafolio de créditos a personas morales (PM I y PM II) y como al portafolio de inversiones para evaluar el riesgo de contraparte.

Para el caso de portafolio de créditos a personas físicas se utiliza el método desarrollado por Díaz (2007), el cual se describe a continuación.

2.3.1 Modelo cópulas elípticas (personas físicas)

En la literatura existe una amplia gama de trabajos que permiten modelar el riesgo de crédito de portafolios de préstamos comerciales -empresas o personas morales- de acuerdo con los lineamientos propuestos por los principales modelos de la industria: CreditMetrics (CM), KMV Portfolio Manager (KMV), Credit Risk+, o Credit Portfolio View (véase Crouhy *et al.* 2000; Crosbie *et al.* 2002). Sin embargo, la situación no parece ser la misma para los préstamos a personas físicas. La escasez de trabajos en este rubro ha obligado a los practicantes a adaptar los modelos relativos a los préstamos comerciales como estrategia para medir el riesgo de crédito en portafolios de préstamos personales, según sean las

necesidades o las disponibilidades de información de las instituciones financieras (De Andrade et al. 2004; Perli et al. 2004).

En este apartado se describe una metodología para estimar los parámetros de riesgo probabilidad de incumplimiento (PD), exposición al momento del incumplimiento (EAD) y pérdida dado el incumplimiento (LGD).

Dado que el número de exposiciones es considerablemente grande y que, en consecuencia, es casi imposible modelar los incumplimientos por cuenta individual, se emplea la técnica de segmentación "Detección de Interacción Automática Ji-Cuadrada" (CHAID, por sus siglas en inglés) para homogeneizar los productos en grupos de créditos de acuerdo con su perfil de riesgo, los cuales se denominan como cubetas. La técnica es una de las más socorridas en la literatura no sólo por la simplicidad del procedimiento sino, fundamentalmente, por su notable flexibilidad para identificar divisiones óptimas cuando las variables son continuas, nominales e incluso categóricas (Biggs et al. 1991). En conformidad con CHAID, las trayectorias descritas por las variables independientes a lo largo de los árboles de decisión permiten dividir a la población en grupos significativamente diferentes de acuerdo con alguna variable clave propuesta.

A continuación se define cierta notación necesaria para determinar los parámetros de riesgo del portafolio segmentado. Sean $i = 1, \dots, M$ las cubetas en que se divide el portafolio; $t = 1 \dots n$ las fechas de observación; $j = 1, \dots, N_{it}$ los créditos y $e_{it}^{(j)}$ su exposición; $Y_{it}^{(j)}$ la indicadora del incumplimiento para cada crédito j dentro de una ventana anual a partir de la fecha de observación y, finalmente, $ead_{it}^{(j)}$ el saldo de dicho crédito al momento de su incumplimiento. Con esta notación, los estimadores de los factores de riesgo utilizados para cuantificar las pérdidas del portafolio se pueden definir como sigue:

Para calcular la probabilidad de incumplimiento PD_i de la cubeta i se utiliza como estimador a la tasa de incumplimiento observada, TI_{it} correspondiente a la ventana anual t (vista a partir de la fecha de observación t) en la cubeta i ; esto es:

$$\hat{I}_{it} = \frac{n_{it}}{N_{it}}, \quad (1)$$

donde $n_{it} = \sum_{j=1}^{N_{it}} Y_{it}^{(j)}$ es el número de incumplimientos observados en la correspondiente ventana de observación y $\hat{I}_{i1}, \dots, \hat{I}_{in}$ las realizaciones del parámetro de riesgo PD_i para cada cubeta $i = 1, \dots, M$.

Para el cálculo de EAD_i (en porcentaje de su saldo), para cada cubeta i , se emplea como proxy a la variable F_i o factor de conversión del crédito, la cual se define como la proporción pérdida de la exposición inicial de los créditos al momento del incumplimiento. En concreto para cada ventana de observación $t = 1 \dots, n$ se calcula F_i mediante el estimador insesgado

$$\hat{F}_{it} = \frac{\sum_{j=1}^{N_{it}} ead_{it}^{(j)} Y_{it}^{(j)}}{\sum_{j=1}^{N_{it}} e_{it}^{(j)} Y_{it}^{(j)}} \quad (2)$$

En el cálculo de LGD es primordial conocer, primero, el comportamiento de las recuperaciones de los créditos que incumplen exactamente en cada fecha de observación. Por eso es importante definir para cada producto p (formado a su vez por un conjunto de cubetas) el porcentaje que se recupera del saldo ead_{pt} de todos los créditos incumplidos en t durante los primeros k meses posteriores (ventana de recuperación). Cuando se consideran los costos fijos c_p en el proceso de recuperación de cada producto p , el estimador de la tasa de recuperación τ_{pt} está dado por

$$\hat{\tau}_{pt} = \sum_{j=1}^k \frac{1 - c_p}{(1 + r)^j} \frac{R_{pt}^{(j)}}{ead_{pt}}, \quad (3)$$

donde $R_{pt}^{(j)}$ es la recuperación del mes j posterior correspondiente a los créditos del producto $p = 1, \dots, K$ que incumplieron en la fecha t y r es la tasa de interés adecuada para descontar los flujos. Con el cálculo de $\hat{\tau}_{pt}$ se puede obtener, para cada fecha de observación $t = 1, \dots, n$, el estimador

$$\hat{LGD}_{pt} = 1 - \hat{\tau}_{pt}, \quad (4)$$

que corresponde a una realización de LGD_p , observando el incumplimiento para el producto p en una ventana de recuperación de k meses.

Procedimiento 2

Se construye X_M un vector cuyas columnas corresponden a los residuales obtenidos de filtrar los rendimientos anuales históricos de los factores de riesgo modelados en el Procedimiento 1 mediante un modelo ARMA-GARCH. Así mismo, sobre las series históricas de PD_i , EAD_i , LGD_p y $\overline{PD}^*$ se lleva a cabo un filtrado del mismo tipo para obtener residuales que corresponden a las columnas de un vector X_C . Los ajustes anteriores se realizan utilizando las mismas ventanas de observación de factores de riesgo de mercado y parámetros de riesgo de crédito. Enseguida se ajusta una cópula C_{X_M, X_C} sobre el vector (X_M, X_C) . De igual forma, se ajusta también una cópula t de Student agrupada C_{X_M} sobre el vector X_M . Entonces la función multivariada dada por

$$C_{X_M|X_M} = \frac{C_{X_M, X_M}}{C_{X_M}} \quad (5)$$

es la distribución (cópula) de los residuales X_C condicional a los residuales de mercado X_M .

El procedimiento de simulación consiste en construir realizaciones de los residuales X_M utilizando la cópula C_{X_M} . Asimismo, se simulan observaciones conjuntas de la cópula C_{X_M, X_C} ajustada. Finalmente, a partir de la distribución multivariada (5) se generan simulaciones de los parámetros de riesgo $\overline{PD}^*$, PD_i , EAD_i y LGD_p .

Por último, las pérdidas por producto (paso Ag3.2) en cada escenario simulado se obtienen mediante la fórmula

$$L_p = \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_k\}} e_i * PD_i * EAD_i * LGD_p \quad (6)$$

donde e_i es la expresión correspondiente a la cubeta i .

2.3.2 Modelo de Sector (empresas)

Supongamos que el comportamiento de los rendimientos anuales estandarizados R_{ik} de la empresa i en el subportafolio⁸ k se pueden describir a partir de un factor común Y_k y un componente de ruido no sistemático ε_{ik} , mediante la siguiente ecuación:

$$R_{ik} = \sqrt{\rho_k} Y_k + \sqrt{1 - \rho_k} \varepsilon_{ik}, \quad (7)$$

donde Y_k y ε_{ik} son i.i.d. $N(0, 1)$. El componente ε_{ik} representa el riesgo específico inherente a la empresa i y Y_k es el riesgo común a todas las empresas analizadas en el subportafolio k . Utilizando este enfoque, la correlación entre los rendimientos de los activos de cualesquiera dos empresas i y j está dado por $E[R_{ik} R_{jk}] = \rho_k$. El modelo es una versión simple del modelo de umbral descrito en Embrechts *et al.* (2005).

Para caracterizar el evento de *default* en alguna empresa i del subportafolio, se define una v.a. binaria Z_{ik} que toma el valor 1 en caso de incumplimiento con probabilidad p_k , y el valor 0 en cualquier otro caso. De la teoría de Merton (1974) se tiene

$$Z_{ik} = 1 \text{ si y sólo si } R_{ik} \leq \Phi^{-1}(p_k) \quad (8)$$

donde $\Phi^{-1}(\cdot)$ es la función de distribución normal estándar inversa. Entonces es posible verificar que para este modelo, la probabilidad de incumplimiento de la empresa i en un horizonte anual, dado que el factor sistemático Y_k toma el nivel y_k , es

$$P(R_{ik} \leq \Phi^{-1}(p_k) | Y_k = y_k) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_k) - \sqrt{\rho_k} y_k}{\sqrt{1 - \rho_k}}\right) \quad (9)$$

Entonces, condicional al valor y_k del factor sistémico, la pérdida del subportafolio k está dada por

$$(L_k | Y_k = y_k) = E_k s_k \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_k) - \sqrt{\rho_k} y_k}{\sqrt{1 - \rho_k}}\right) \quad (10)$$

donde E_k y s_k representan la exposición y la pérdida dado el incumplimiento, respectivamente. Mediante la especificación de pérdidas condicionales dada por (10) se calibra el modelo de factores

$$Y_k = \overline{PD}^* \sqrt{\beta_k} + \sqrt{1 - \beta_k} \eta_k, \quad (11)$$

donde Y_k es el componente sectorial del PIB y η_k es un proceso de ruido blanco. Finalmente, las pérdidas del portafolio total se calculan como

$$L^{RC} \sum_k (L_k | Y_k = y_k), \quad (12)$$

⁸ Se utiliza el término subportafolio para referirse a un conjunto específico de productos financieros. Generalmente, la estructuración de los subportafolios atiende a aspectos de negocio pero también se pueden considerar otros criterios basados en los perfiles de riesgo sobre los que se seleccionen determinadas cubetas.

donde el nivel y_k se determina mediante la ecuación (11).

Procedimiento 3

A partir de las simulaciones obtenidas en el Procedimiento 2, y las realizaciones del proceso de ruido blanco η_k , la ecuación (11) permite obtener niveles simulados del componente sectorial Y_k . Posteriormente, si se evalúan las expresiones (10) y (12), se obtienen las pérdidas por riesgo de crédito del portafolio en cuestión. Con esto se han simulado las realizaciones del paso Ag2.2.

2.4 Enfoque operacional

Para integrar las pérdidas por riesgo operacional (RO_p) en el esquema de agregación propuesto, se plantea una aproximación bajo el enfoque descendente. Para ello, se realizan ciertos supuestos sobre la distribución de las pérdidas operacionales. Siguiendo uno de los enfoques sugeridos por el BCBS (2001), se simula el número de eventos de pérdidas por RO_p a un horizonte anual con una distribución de Poisson, en tanto que la severidad de dichos eventos se modela con una distribución gaussiana inversa (GI), finalmente, la pérdida total se obtiene como la suma de los eventos de pérdida individuales.

Para fines prácticos, se optó por modelar la distribución total de las pérdidas L^{RO_p} directamente con la distribución GI , la cual está dada por

$$GI(x; \mu, \lambda) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right) + \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right) + e^{2\frac{\lambda}{\mu}}, \quad (13)$$

para $x > 0$, donde $\mu > 0$ y $\lambda > 0$ son los parámetros de media y forma, respectivamente.

La elección de los parámetros se hace mediante un método de "cuantil-momentos". Más precisamente, dadas estimaciones expertas de la media m y de un cuantil x_q de nivel de confianza q , se determina $\mu^{RO_p} = m$ y el parámetro λ^{RO_p} tal que satisface la relación $GI(x_q; m, \lambda^{RO_p}) = q$.

Procedimiento 4

Se realiza un análisis del comportamiento distribucional entre las pérdidas históricas de las v.a. L^{RO_p} y L^{RC} . Para ello, se ajusta una cópula elíptica C al vector $(\hat{L}^{RO_p}, \hat{L}^{RC})$ formado por las series de pérdidas anuales observadas para cada tipo de riesgo. Adicionalmente, se ajusta alguna función de distribución F_{RC} a la serie de pérdidas observadas a nivel agregado $\hat{L}_1^{RC}, \dots, \hat{L}_n^{RC}$. Entonces, las pérdidas por RO_p , condicionales a las de crédito, se obtienen mediante la función de distribución

$$F_{L^{RO_p} | L^{RC}=1}(x) = \frac{C(GI(x; \mu^{RO_p}, \lambda^{RO_p}), F_{RC}(l))}{F_{RC}(l)} \quad (14)$$

Los pasos Ag4 y Ag5 se obtienen con el procedimiento descrito.

2.5 Composición del portafolio

La implementación del modelo de agregación de riesgos se realiza utilizando un portafolio formado por posiciones de las del tipo que mantienen las instituciones bancarias mexicanas que tienen operaciones activas de inversiones y otorgamiento de créditos en diversas líneas de negocio.⁹ Las posiciones del portafolio en cuestión están agrupadas por subportafolios de acuerdo con la Tabla 1.

Tabla 1. Composición del portafolio por subportafolios de productos

Sub Portafolios		Exposición (millones de pesos)
Inversiones	Disponibles venta	18,150
	Conservados a vencimiento	206,894
Personas Físicas	Tarjetas de Crédito	210,550
	Hipotecario	293,647
	Consumo	332,736
	Otros (Personales)	7,293
P Morales I	Comercial	246,296
	Otros (PIDIREGAS, IPAB)	110,267
P Morales II	Gobierno Federal	1,727
	Estados y Municipios	30,119
	Banca Desarrollo	72,484
	Medianas Empresas	6,680
	Pequeñas Empresas	6,982
	Banca Comercial	1,140,441
	Bienes Raíces	48,709
	Agrícola y Silvícola	94,789
	Manufactura	18,004
	Otros (Privada, Patrimonial)	1,806

El portafolio de inversiones está compuesto principalmente por bonos (gubernamentales y privados), derivados de tasa (fijos, flotantes, caps, floors, swaps, opciones sobre bonos, opciones sobre swaps y opciones embebidas sobre bonos) en moneda nacional y dólares, así como por acciones y opciones europeas de compra y venta sobre éstas acciones.¹⁰

⁹ Por razones de confidencialidad no se mencionará la fuente de información ni la composición precisa del portafolio a nivel granular. Esta limitación no afecta, sin embargo, el alcance de los resultados ya que el método propuesto puede replicarse sin ninguna pérdida de generalidad en cualquier institución financiera. Se presenta su composición agregada por tipo de subportafolio y líneas de negocio, que consiste en realidad de un subconjunto con el tipo de posiciones más representativas

¹⁰ Dado que el análisis de los diferentes modelos de valuación para los instrumentos financieros que componen al portafolio queda fuera del alcance de este documento, se recomienda ver Hull (2006). Específicamente, la valuación de los derivados de tasa se implementó bajo el modelo de Heath-Jarrow-Morton (Heta et al. 1992) para árboles binomiales con un factor constante (Ho y Lee 1986) y otro exponencial. Para el caso de las opciones, por simplicidad, se empleó el método de Cox-Ross-Rubinstein (Cox et al. 1979), un modelo de tiempo discreto de árboles recombinantes.

En la siguiente sección se lleva a cabo un análisis preliminar de todos los factores de riesgo que afectan el valor del portafolio: estructuras de plazos de las tasas de CETES, papel bancario (BANCARIO), reporto gubernamental (REPOG1), reporto bancario (REPOB1), descuento de swaps de tasa (IRS), tasa real (REAL), libor (LIBOR), descuento bonos mexicanos que cotizan en dólares (UMS), descuento bonos privados para varias calificaciones (CALIF C, B, AAA), el tipo de cambio (FIX) y el Índice de precios y cotizaciones de la Bolsa mexicana (IPC).

Por otro lado, el portafolio de créditos a personas físicas incluye exposiciones de créditos divididos en tres categorías: consumo (préstamos de auto, nómina, educación), revolventes (tarjetas de crédito) e hipotecario (segmentos vivienda de Interés Social, Media y Residencial). Para aplicar la metodología de medición del riesgo para este portafolio, se realiza una segmentación en cubetas de acuerdo con los aspectos discutidos en la sección 2.3.1. Las variables relevantes que determinan los niveles de pérdida por riesgo de crédito en este portafolio son los parámetros PD , EAD y LGD , los cuales son estimados a partir de la experiencia de pago de los clientes y las recuperaciones realizadas sobre los créditos incumplidos.¹¹

El portafolio de créditos a empresas está formado por créditos otorgados a personas morales y se encuentra segmentado con base en el sector económico de su principal actividad productiva.¹² Por razones del tamaño del portafolio, se tiene en principio una división general que considera dos grandes grupos: Personas morales PM I (PM I) y Personas morales II (PM II). El modelo de agregación para ese portafolio ha sido descrito en la sección 2.3.2, y para su implementación se dispone, a nivel de cada subportafolio k , de estimaciones del parámetro de riesgo PD_k derivadas de un modelo de calificación interna. Así mismo, se utilizan las observaciones del rendimiento histórico Y_k del índice sectorial k del Producto Interno Bruto (PIB),¹³ y un factor global de riesgo de crédito PD^* dado por las tasas de incumplimiento del sistema.¹⁴

¹¹ El detalle de la implementación de esta metodología también puede consultarse en Díaz et al. (2009).

¹² La división sectorial y de rama de la economía está basada en la segmentación de 73 sectores que se tienen para variables macroeconómicas como el PIB: Agrícola, silvícola y pesquero; Industrial (Minería, Manufactura, y Construcción); Servicios y otras actividades; Crédito a la vivienda (Interés Social y Media y residencial); Créditos al consumo (TDC, Bienes consumo duradero y otros); Sector Financiero (privado y público), Sector público (Gobierno Federal, Estados y municipios, Organismos y empresas), Otros (Pidiregas, IPAB).

¹³ Como proxy del PIB se utilizó el Índice Global de la Actividad Económica (IGAE) que se publica de manera mensual (www.inegi.gob.mx).

¹⁴ Para determinar las tasas de incumplimiento a nivel sistema, se utiliza como proxy el índice de morosidad del sector bancario dado por el cociente entre la cartera vencida promedio de doce meses y la cartera total promedio de doce meses, de todo el sector de la banca múltiple. Alternativamente, se puede utilizar la denominada tasa de deterioro ajustada en la que se agregan las quitas y castigos. En el caso en que se desee utilizar el proxy del nivel de incumplimiento por segmento de la cartera, el modelo lineal dado por la ecuación (11) debe

Finalmente, relativo al riesgo operacional, se considera la taxonomía definida por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), la cual emitió las Disposiciones de Carácter General Aplicables a las Instituciones de Crédito (denominada comúnmente como Circular nica de Bancos, véase CNBV 2010, disponible en www.cnbv.gob.mx). Los distintos riesgos operacionales que la institución tiene registrados se encuentran mapeados a cada línea de negocio. En el caso particular del portafolio de estudio, se dispone de información limitada sobre los eventos de pérdida, por lo que se recurre a la determinación de estimaciones expertas sobre el primero y segundo momento de la distribución de pérdidas. La agregación se realiza a través de simulaciones de las pérdidas del portafolio por riesgo operacional condicional a las pérdidas por riesgo de crédito.

3. Análisis de series de tiempo de los factores de riesgo

En esta sección se presentan los análisis de series de tiempo para los factores de riesgo de mercado. Por cuestiones de confidencialidad de la información utilizada, se omiten los resultados de los análisis hechos a los parámetros de riesgo de crédito y pérdidas por riesgo operacional. El objetivo de esta investigación es proponer una metodología de agregación de riesgos, cuyas fases y procedimientos secuenciales han quedado detallados en la sección anterior.

Para evaluar el supuesto de estacionariedad en las series financieras y económicas, se emplearon estadísticas de prueba tradicionales como: Dickey-Fuller Aumentada (ADF), Philips-Perron (PP), Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS). Adicionalmente, se emplearon versiones más robustas de las pruebas Elliot-Rothenber-Stock (ERS), DF con eliminación de tendencia GLS (DF-GLS) y la PP modificada eficiente (MPP). Los resultados obtenidos no indicaron problemas de raíces unitarias para las series de rendimientos logarítmicos diarios bajo transformaciones simples, tales como la función logaritmo y primeras o segundas diferencias.¹⁵

Para fines ilustrativos sobre el comportamiento de las series de datos, en la Figura 1 se presentan resultados gráficos para los nodos 30 y 720 días de la curva de CETES. Las gráficas indican que las series en niveles tienen serios problemas de autocorrelación serial y heterocedasticidad.¹⁶

En la Figura 1 (a) se muestra la evolución diaria de las series de tiempo de los nodos de CETES seleccionados de enero de 2003 a julio de 2008 (período de

incorporar el efecto específico del segmento. La información utilizada fue obtenida de la información estadística mensual de la banca múltiple reportada por la CNBV (www.cnbv.gob.mx).

¹⁵ La inquietud de evaluar el supuesto de estacionariedad bajo pruebas más robustas, tuvo como móvil diversos estudios que han encontrado deficiencias en las versiones tradicionales de pruebas de raíces unitarias. Al respecto, se recomienda ver Schwert (1989), Perron *et al.* (1996), Caner *et al.* (2001).

¹⁶ Vale la pena comentar que la elección de los nodos principales se realizó mediante análisis de factores y componentes principales, identificando, para cada curva de tasas de interés que afecta a nuestro portafolio, tres nodos principales: corto, mediano y largo plazo.

análisis). La Figura 1 (b) incluye las gráficas de los rendimientos logarítmicos diarios de cada serie. Finalmente, las Figuras 1 (c) y (d) presentan para los nodos 30 y 720, respectivamente, a la función de autocorrelación lineal (FAC) de los rendimientos, su función de autocorrelación parcial (PACF), así como la FAC de los rendimientos al cuadrado. El comportamiento de esta última gráfica confirma la presencia de heterocedasticidad en los rendimientos de ambas series, situación que se infería del bosquejo de la serie original.

Series de tiempo, rendimientos y gráficas de AFC y PACF para las series históricas tasas CETES nodos 30 y 720

FIGURA 1(A)

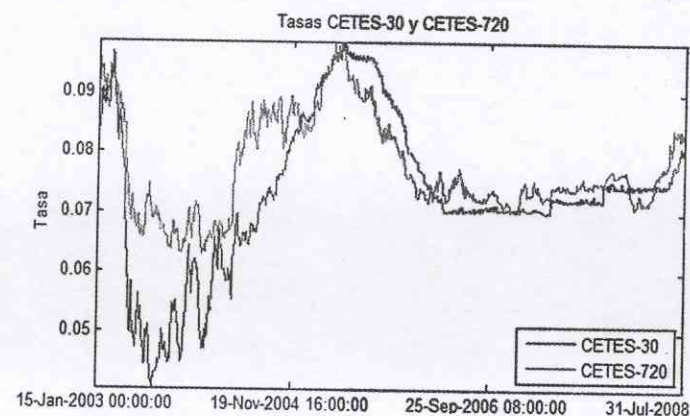


FIGURA 1(B)

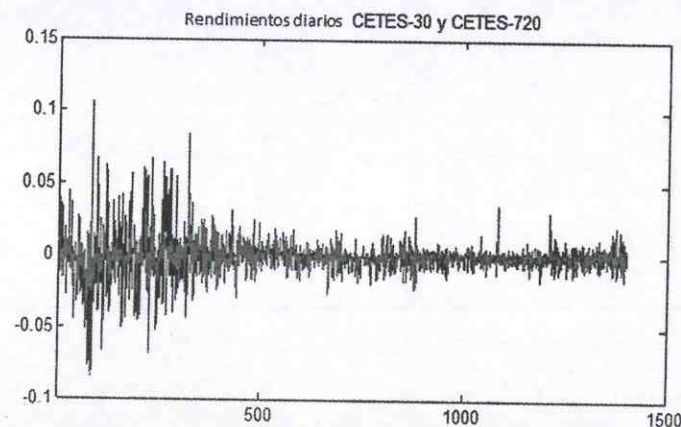


FIGURA 1(C)

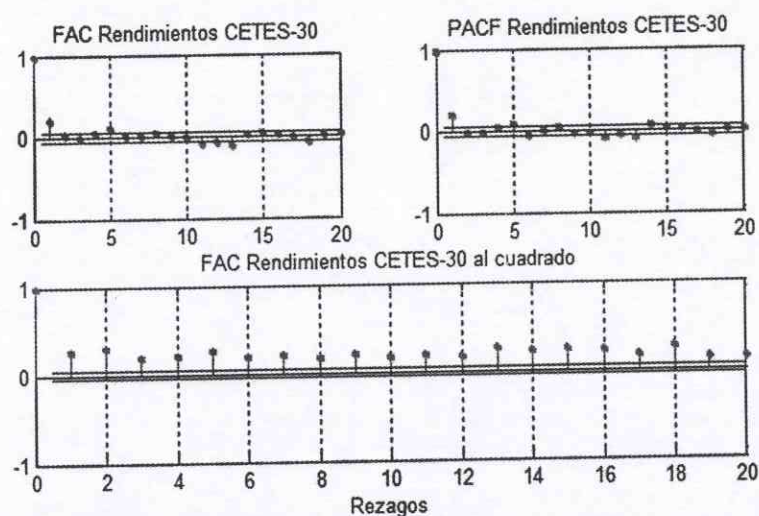
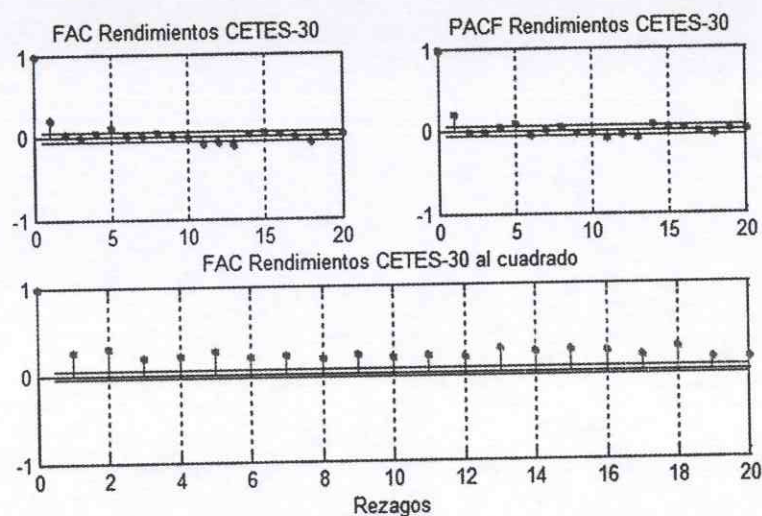


FIGURA 1(D)

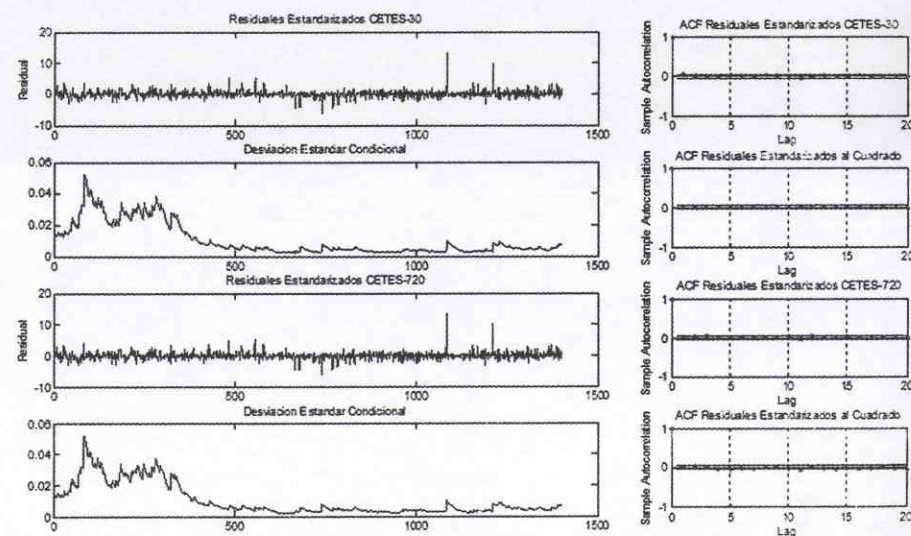


La evidencia empírica anterior sugiere el uso de modelos para la media y varianza condicionales. Específicamente, se realizaron ajustes ARMA(2,2)-GARCH(1,1) para los nodos principales CETES, BANCARIO, REPOG1, REPOB1, IRS, REAL y LIBOR, mientras que un ARMA(0,5)-GARCH(1,1) resultó más adecuado para UMS, CALIF C, B, AAA, FIX e IPC.

Siguiendo el análisis de las series de CETES, se incluyen las gráficas resultantes del filtrado a las series con los modelos ARMA-GARCH ajustados (ver Figura 2). Específicamente, se presentan los residuales estandarizados, la desviación estándar condicional inducida por los modelos ajustados, así como las correspondientes FAC para los residuales y sus valores al cuadrado.

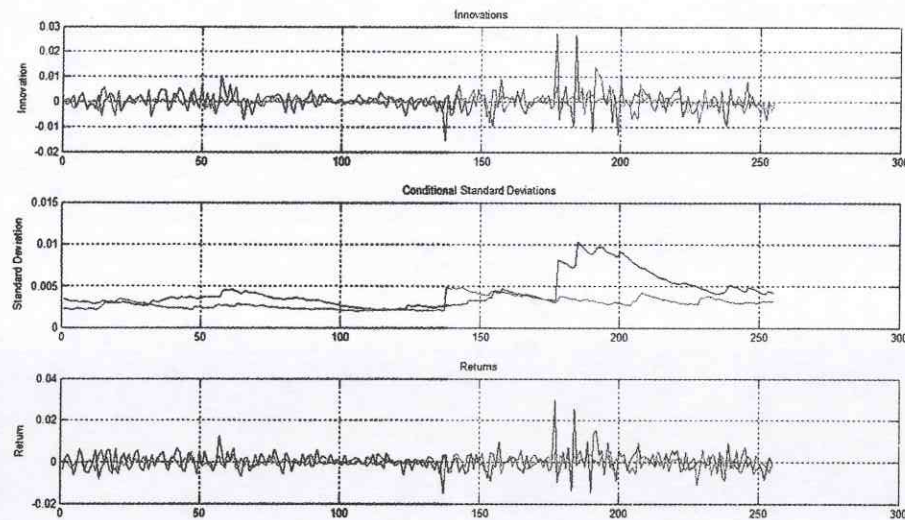
El filtrado de la serie resulta adecuado para ambos nodos, ya que los residuales estandarizados mantienen un comportamiento del tipo de un ruido blanco. Por su parte, las gráficas de la desviación estándar condicional indican decaimiento sostenido para la última parte del primer tercio de la ventana de observación y un comportamiento más estabilizado y con algunos saltos en el resto de la muestra.

FIGURA 2. AJUSTE ARMA(5,5)-GARCH(1,1)



Con la especificación ARMA-GARCH ajustada se realizan simulaciones residuales, volatilidad condicional y trayectorias de los rendimientos simuladas para una ventana anual. Al respecto se incluye la Figura 3 con algunos ejercicios de simulación para el caso de la serie de nodos de CETES de 30 días

FIGURA 3. Simulación trayectorias residuales, volatilidad condicional, serie



El uso de ARMA-GARCH univariado en las series de rendimientos parece mostrar ajuste adecuado. Sin embargo, para comparar el desempeño de los modelos univariados utilizados, se decidió llevar a cabo ajustes de distintas especificaciones de modelos GARCH multivariados (MGARCH).

En la Tabla 2 se incluye, a manera de resumen, los distintos modelos calibrados. De acuerdo con los valores obtenidos de los criterios de Akaike y Schwartz, no se encontró evidencia de que los modelos MGARCH mantengan una mayor capacidad explicativa sobre el comportamiento de las series que sus contrapartes univariadas. De nuevo, por razones de espacio, se presentan los resultados correspondientes al nodo 30 de la curva de CETES.

Tabla 2. Resumen de los modelo MGARCH ajustados

Variable	LM (Efectos ARCH)				L-Jung Box a Residuales^2			
	Errores Normales		Errores t Student		Errores Normales		Errores t Student	
	Estadística	p-value	Estadística	p-value	Ljung-Box	p-value	Ljung-Box	p-value
CETES	5.15	0.8657	5.12	0.8366	4.63	0.8453	4.98	0.8260
BANCARIO	16.85	0.1621	19.08	0.1630	20.72	0.0797	19.37	0.0762
REPOG1	26.64	0.0212	30.30	0.0083	31.82	0.0041	35.21	0.0016
REPOB1	18.61	0.1429	17.70	0.1230	10.61	0.6917	8.38	0.8111
IRS	11.30	0.4894	9.87	0.6250	16.61	0.2020	12.50	0.4163
REAL	20.10	0.0998	23.25	0.0574	21.52	0.0544	22.45	0.0473
LIBOR	42.38	0.0003	37.58	0.0005	58.33	0.0000	51.09	0.0000
CALIF C	9.85	0.6341	13.23	0.5056	12.24	0.4480	13.86	0.3674
CALIF B	31.07	0.0074	15.64	0.2593	88.21	0.0000	40.11	0.0002
CALIF AAA	28.63	0.0120	29.97	0.0113	26.21	0.0287	29.42	0.0255
FIX	15.81	0.1120	17.50	0.0887	32.87	0.0047	29.48	0.0040
IPC	32.45	0.0090	35.59	0.0078	40.26	0.0003	45.41	0.0003

Adicionalmente, se determinaron los valores de las estadísticas de Portman-teau, las cuales permiten evaluar la validez y supuestos de las especificaciones de modelos MGARCH utilizados. Las versiones multivariadas que proporcionan los mejores ajustes corresponden a las especificaciones DVEC y CCC. De hecho, la mayoría de los coeficientes del resto de ajustes MGARCH no siempre resultaron significativos.

Finalmente, y sólo para fines ilustrativos, se evalúa el efecto que tiene la distribución condicional de los errores del modelo. Para ello, como alternativa a la Normal multivariada, se prueba la distribución *t* de Student multivariada. Como se muestra en la Tabla 3, no existe diferencia significativa entre ambas especificaciones.

Tabla 3. Estadísticas LM para cada variable marginal

Variable	LM(Efecto ARCH)			
	Errores Normales		Errores t-student	
	Estadística	p-value	Estadística	p-value
CETES	5.15	0.8657	5.12	0.8366
BANCARIO	16.85	0.1651	19.08	0.1630
REPOGI	26.64	0.0212	30.30	0.0083
REPOBI	18.61	0.1429	17.70	0.1230
IRS	11.30	0.4894	9.87	0.6250
REAL	20.10	0.0998	23.25	0.0574
LIBOR	42.38	0.0003	37.58	0.0005
CALIF C	9.85	0.6341	13.23	0.5056
CELIF B	31.07	0.0074	15.64	0.2593
CALIF AAA	28.63	0.0120	29.97	0.0113
FIX	15.81	0.1120	17.50	0.0887
IPC	32.45	0.0090	35.59	0.0078

Tabla 3. Estadísticas L-Jung Box para cada variable marginal (continuación)

Variable	L-Jung Box a Residual 2			
	Errores Normales		Errores t-student	
	Ljung-Box	p-value	Ljung-Box	p-value
CETES	4.63	0.8453	4.98	0.8660
BANCARIO	20.72	0.0797	19.37	0.0762
REPOGI	31.82	0.0041	35.21	0.0016
REPOBI	10.61	0.6917	8.38	0.8111
IRS	16.61	0.2020	12.50	0.4163
REAL	21.52	0.0544	22.45	0.0473
LIBOR	58.33	0.0000	51.09	0.0000
CALIF C	12.24	0.4488	13.86	0.3674
CELIF B	88.21	0.0000	40.11	0.0002
CALIF AAA	26.21	0.0287	29.42	0.0255
FIX	32.87	0.0047	29.48	0.0040
IPC	40.26	0.0003	45.41	0.0003

Cabe mencionar que tampoco se encontró una mejora significativa respecto de los criterios AIC, BIC y Verosimilitud, según revela en la Tabla 4.

Tabla 4. Comparación entre el modelo DVEC con ruido normal y *t* de Student (multivariados)

Distribución errores	Estadística Portmanteau		Criterio		
	Residuales	Residuales ^2	AIC	BIC	Verosimilitud
Normal Multivariada	1688	1198	-3760	-3612	1931
T Multivariada	1676	1163	-3793	-3641	1961

Los resultados muestran que el uso de especificaciones de GARCH multivariadas no presenta diferencia significativa respecto del ajuste univariado de las series individuales. Como resultado de análisis similares implementados a todas las series de datos, se decide ajustar una cópula multivariada sobre los residuales obtenidos del filtrado individual de las series, de acuerdo con lo especificado en los Procedimientos 1 y 2.

4. Resultados de agregación

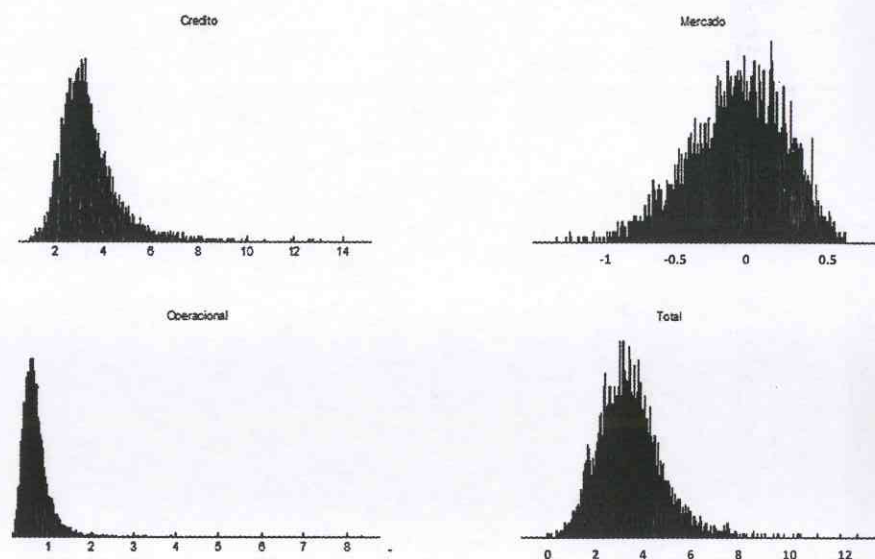
En esta sección se presentan los resultados consolidados que arroja el algoritmo de agregación planteado en la sección 2. Para llevar a cabo cada uno de los pasos del algoritmo, en línea con los cuatro procedimientos descritos en la misma sección, se desarrollaron rutinas computacionales en el software MATLAB.¹⁷

¹⁷ Para hacer más eficiente el proceso de cálculo, varios de los algoritmos de estimación se realizaron en lenguaje C.

También se utilizaron herramientas de valuación de los instrumentos financieros y modelos de series de tiempo que incluye el software matemático.

La siguiente gráfica muestra, para el portafolio total, el comportamiento de las pérdidas por tipo de riesgo y a nivel agregado

Figura 4. Distribución de pérdidas del portafolio por tipo de riesgo y riesgo consolidado (% de valor del portafolio)



Se realizaron varios ejercicios de agregación bajo diferentes estructuras de dependencia para evaluar el impacto sobre el nivel de riesgo total y efecto de diversificación (como porcentaje del saldo correspondiente). Específicamente, se ejecutó el proceso de agregación mediante el uso de cópulas gaussianas (Tabla 5), *t* de Student simétrica (Tabla 6) y la cópula *t* Agrupada (Tabla 7). En los análisis, se estima la medida de riesgo Var_q sobre cada una de las distribuciones de pérdidas simuladas a nivel de subportafolio y tipo de riesgo.¹⁸ Como se ha comentado antes, el nivel de confianza es del 99.5% y el horizonte es anual. El ajuste de la cola de las distribuciones de pérdidas se realiza mediante el ajuste de una distribución Pareto Generalizada.¹⁹

¹⁸ Los números entre paréntesis corresponden al beneficio por diversificación, expresados como porcentaje del saldo correspondiente

¹⁹ La estimación de los parámetros de esta distribución y la obtención analítica de la medida de riesgo Var_q , corresponden al proceso de implementación del método denominado POT ("Peaks-Over-Threshold") el cual es utilizado en el análisis de distribuciones de colas pesadas. El método POT representa una de las dos alternativas principales que ofrece la Teoría de Valores Extremos (TVE) para el estudio del comportamiento del máximo de variables aleatorias. El procedimiento utilizado en la implementación del método POT se puede revisar, por ejemplo, en Embrechts *et al.* (2005).

Tabla 5. Agregación de riesgos por subportafolios y tipo de riesgo: Ajuste cópula gaussiana

Portafolios	Crédito	Mercado	Operacional	CE Agreg.
Inversiones				
Disponibles venta venta	5.1%	12.7%	11.4%	19.3% (9.9%)
Conservados a vencimiento	1.5%	4.8%	2.0%	6.6% (1.8%)
CCE Agregado	1.2% (0.6%)	3.7% (1.8%)	1.9% (0.9%)	4.1% (3.4%)
P. Físicas				
Tarjetas de Crédito	19.3%	0.9%	20.3 %	27.5% (13.1%)
Hipotecario	3.3%	0.9%	2.6%	4.7% (2.0%)
Consumo	17.1%	0.9%	13.7%	23.2% (8.5%)
Otros Personales	12.4% (0.6%)	0.9% (1.8%)	9.9% (0.9%)	15.1% (8.1%)
CCE Agregado	10.6% (2.4%)	0.7% (0.3%)	8.2% (3.4%)	14.3% (3.7%)
P. Morales				
Comercial	2.8%	1.1%	0.7 %	3.5% (1.1%)
Otros (PIDIREGAS IPAB)	2.3%	0.9%	0.9%	3.2% (0.9%)
CCE Agregado	1.9% (0.8%)	0.8% (0.2%)	0.6% (0.2%)	2.6% (0.9%)

Tabla 5. Agregación de riesgos por subportafolios y tipo de riesgo: Ajuste cópula gaussiana (continuación)

Portafolios	Crédito	Mercado	Operacional	CE Agreg.
P. Morales II				
Gobierno Federal	0.2%	1.0%	0.4 %	1.0% (0.6%)
Estados y Municipios	13.9%	1.4%	5.6%	12.8% (8.1%)
Banca Desarrollo	27.9%	1.3%	15.7%	28.9% (16.0%)
Medianas Empresas	23.4%	1.5%	25.8 %	31.5% (19.3%)
Pequeñas Empresas	25.6%	1.4%	27.7%	34.8% (19.9%)
Banca Comercial	6.0%	1.5%	3.4%	7.9% (3.0%)
Bienes Raíces	7.3%	1.1%	3.5 %	8.7% (3.2%)
Agrícola y Silvicoña	24.5%	1.2%	13.5%	29.0.% (10.2%)
Manufactura	28.4%	1.1%	21.7 %	34.7% (16.5%)
Otros Privada, Patrimonial	12.8%	1.6%	9.2 %	16.3% (7.4%)
CCE Agregado	6.4% (2.7%)	1.1% (0.4%)	3.6% (1.6%)	7.2% (3.8%)
CCE Agregado Global	6.6% (2.2%)	1.0% (0.5%)	4.5% (1.9%)	8.4% (3.4%)

Tabla 6. Agregación de riesgos por subportafolios y tipo de riesgo: Ajuste cópula *t* simétrica

Portafolios	Crédito	Mercado	Operacional	CE Agreg.
Inversiones				
Disponibles venta venta	6.2%	15.4%	13.8%	23.4% (12.0%)
Conservados a vencimiento	1.8%	5.7%	2.4%	7.7% (2.1)%
CCE Agregado	1.4% (0.7%)	4.3% (2.1%)	2.2% (1.1%)	4.9% (4.1%)
P. Físicas				
Tarjetas de Crédito	22.6%	1.1%	23.7 %	32.1% (15.3%)
Hipotecario	3.8%	1.0%	3.0%	5.5% (2.4%)
Consumo	18.9%	1.0%	15.2%	25.7% (9.4)%
Otros Personales	14.0%	1.1%	11.2%	17.1% (9.1%)
CCE Agregado	11.7% (3.1%)	0.7% (0.3%)	9.1% (4.2%)	15.8% (4.6%)
P. Morales				
Comercial	3.3%	1.3%	0.9 %	4.2% (1.3%)
Otros (PIDIREGAS IPAB)	2.7%	1.1%	1.1%	3.7% (1.1%)
CCE Agregado	2.2% (0.9%)	1.0% (0.3%)	0.7% (0.2%)	3.1% (1.0%)

Tabla 6. Agregación de riesgos por subportafolios y tipo de riesgo: Ajuste cópula *t* simétrica (continuación)

Portafolios	Crédito	Mercado	Operacional	CE Agreg.
P. Morales II				
Gobierno Federal	0.2%	1.1%	0.5 %	1.1% (0.6%)
Estados y Municipios	15.7%	1.6%	6.3%	14.5% (9.2%)
Banca Desarrollo	30.8%	1.4%	17.3%	31.8% (17.6%)
Medianas Empresas	25.4%	1.7%	27.9 %	34.1% (20.8%)
Pequeñas Empresas	29.1%	1.6%	31.6%	39.6% (22.7%)
Banca Comercial	6.6%	1.6%	3.7%	8.6% (3.3%)
Bienes Raíces	8.4%	1.3%	4.0 %	10.0% (3.7%)
Agrícola y Silvicoña	27.4%	1.4%	15.1%	32.5% (11.4%)
Manufactura	32.3%	1.2%	24.6 %	39.4% (18.7%)
Otros Privada, Patrimonial	14.7%	1.8%	10.6 %	18.8% (8.4%)
CCE Agregado	7.5% (2.5%)	1.3% (0.3%)	4.2% (1.6%)	8.5% (3.7%)
CCE Agregado Global	7.7% (2.2%)	1.2% (0.6%)	5.2% (1.9%)	9.8% (3.5%)

Tabla 7. Agregación de riesgos por subportafolios y tipo de riesgo: Ajuste cópula t graduada

Portafolios	Crédito	Mercado	Operacional	CE Agreg.
Inversiones				
Disponibles venta venta	6.3%	15.8%	14.2%	23.9% (12.3%)
Conservados a vencimiento	1.8%	5.8%	2.4%	7.9% (2.2%)
CCE Agregado	1.5% (0.7%)	4.6% (2.1%)	2.3% (1.0%)	5.1% (4.1%)
P. Físicas				
Tarjetas de Crédito	24.0%	1.2%	25.3 %	34.1% (16.3%)
Hipotecario	4.1%	1.1%	3.3%	5.9% (2.5%)
Consumo	20.3%	1.1%	16.2%	27.5% (10.1)%
Otros Personales	15.0%	1.1%	12.0%	18.3% (9.8%)
CCE Agregado	12.5% (3.2%)	0.8% (0.3%)	9.7% (4.4%)	16.9% (4.9%)
P. Morales				
Comercial	3.4%	1.4%	0.9 %	4.3% (1.4%)
Otros (PIDIREGAS IPAB)	2.8%	1.1%	1.1%	3.9% (1.1%)
CCE Agregado	2.3% (1.0%)	1.0% (0.3%)	0.7% (0.2%)	3.1% (1.1%)

Tabla 7. Agregación de riesgos por subportafolios y tipo de riesgo: Ajuste cópula t agrupada (continuación)

Portafolios	Crédito	Mercado	Operacional	CE Agreg.
P. Morales II				
Gobierno Federal	0.2%	1.2%	0.5 %	1.2% (0.7%)
Estados y Municipios	16.8%	1.7%	6.7%	15.5% (9.8%)
Banca Desarrollo	33.0%	1.5%	18.5%	34.1% (18.9%)
Medianas Empresas	27.0%	1.8%	29.7 %	36.3% (22.2%)
Pequeñas Empresas	31.0%	1.7%	33.6%	42.2% (24.1%)
Banca Comercial	7.1%	1.7%	4.0%	9.2% (3.6%)
Bienes Raíces	8.9%	1.3%	4.2 %	10.5% (3.9%)
Agrícola y Silviconia	29.0%	1.4%	16.0%	34.3% (12.1%)
Manufactura	34.0%	1.3%	25.9 %	41.5% (19.7%)
Otros Privada, Patrimonial	15.7%	1.9%	11.3 %	20.0% (9.0%)
CCE Agregado	7.6% (3.0%)	1.3% (0.4%)	4.3% (1.9%)	8.7% (4.3%)
CCE Agregado Global	8.0% (2.6%)	1.2% (0.6%)	5.4% (2.2%)	10.1% (4.0%)

Los resultados indican que el ajuste gaussiano proporciona estimaciones de CE considerablemente inferiores en comparación a la cópula t agrupada, en un nivel cercano a 20% para el riesgo global del portafolio. Por su parte, las diferencias observadas entre los ajustes de la cópula t agrupada y los de la t simétrica son marginales. En general, ésta última arroja estimaciones de riesgo ligeramente inferiores. A nivel de agregado total, las diferencias son menores a 0.5%, en tanto que para ciertos segmentos del portafolio, las discrepancias son cercanas a 2.5%. En un análisis por tipo de riesgo, las mayores desviaciones se presentaron para el riesgo de crédito. Este último hecho se puede atribuir a la propiedad de la cópula t Agrupada de discriminar entre grupos de factores y parámetros de riesgo con distintas frecuencias de ocurrencia de movimientos extremos conjuntos.²⁰

²⁰ Son los movimientos extremos conjuntos de los factores de riesgo, los eventos que inducen los cambios más fuertes en el valor del portafolio y pérdidas observadas

Finalmente, se discuten algunos de los supuestos y limitaciones más importantes de la metodología propuesta:

- **Algoritmo de simulación.** La forma secuencial del proceso de simulación que se utiliza supone un mecanismo específico en cascada sobre los distintos tipos de riesgos. Por ejemplo, la caracterización de las pérdidas por riesgo de crédito condicionales a los factores de riesgo de mercado se ha formulado en función de la frecuencia con la que se dispone cada una de las variables y parámetros que afectan a cada riesgo. La frecuencia diaria de los datos en el caso del riesgo de mercado permite incorporar modelos de series de tiempo tradicionales con la finalidad de modelar comportamientos agregados a horizonte anual. Por su parte, la disponibilidad de los parámetros de riesgo de crédito con frecuencia mensual, sugiere el uso de los efectos simulados de los factores de riesgo de mercado para capturar los efectos conjuntos a horizonte anual para ambos riesgos. En el caso del riesgo operacional, no se tienen factores económicos que de manera obvia afecten a las pérdidas por este tipo de riesgo, ya que los procesos, sistemas y personas inherentes a cada organización, aunado a sus objetivos, metas y estrategia de negocio específicos constituyen el perfil único que caracteriza a cada institución. Dada la disponibilidad mensual sobre pérdidas en riesgo de crédito y operacional, ambas medidas en horizonte anual, la metodología propuesta sugiere la modelación de las pérdidas de este segundo condicional a las del primero. En la situación probable de dependencia pequeña entre ambos tipos de riesgo, el modelo de cópulas utilizado considera también esta situación como un caso límite de la cópula elíptica.

- **Modelos de pérdidas marginales.** El modelo propuesto para capturar las pérdidas por cada tipo de riesgo contempla el uso de modelos de series de tiempo y valuación (mercado), técnicas de segmentación y modelación conjunta de los parámetros de riesgo de crédito mediante cópulas y modelos lineales por sector, así como el uso de formas distribucionales específicas para las pérdidas por riesgo operacional. Es importante señalar que los modelos propuestos fueron elegidos en gran medida por el tipo, cantidad y calidad en la información que se dispuso para el ejercicio empírico. La metodología propuesta, en consecuencia, no está exenta de limitaciones ya que en muchas situaciones los supuestos que se requieren para que las estimaciones bajo cada modelo calibrado sean robustas no necesariamente se satisfacen en su totalidad dada la limitación en los datos disponibles que cada aplicación particular sobre agregación de riesgos requiera.

El objetivo de la metodología planteada en este documento es el de proveer al lector de herramientas y problemas teórico-prácticos que se enfrentan cuando se desea implementar un modelo de agregación de riesgos. Es importante notar que otros tipos de riesgos como los relativos a la emisión de seguros (riesgos técnicos de seguros), entre otros, no han sido contemplados en este trabajo de investigación. Su estudio se deja como línea futura de investigación.

5. Conclusiones

Cuando una institución logra cuantificar individualmente el riesgo de mercado, de crédito y operacional, el siguiente paso consiste en desarrollar una medida agregada de capital para soportar las decisiones directivas y lograr un mejor entendimiento de los beneficios de la diversificación provenientes de la mezcla de negocios.

El trabajo de investigación presenta una metodología global de agregación de riesgos para una institución financiera. En su proceso de desarrollo, fue necesario incorporar técnicas de series de tiempo y estructuras de dependencia flexibles (cópulas). Las conclusiones centrales indican que las cópulas agrupadas del tipo *t* de Student ofrecen mejores resultados en la modelación del comportamiento de las pérdidas extremas en comparación con las estructuras de dependencia ampliamente utilizadas en finanzas, como es el caso de la cópula gaussiana y *t* de Student simétrica.

Los resultados del documento son, en cierta manera, novedosos pues no hay antecedentes en la literatura local en los que se muestre conjuntamente las siguientes tres características de la metodología desarrollada. La primera es el uso comparativo de cópulas multivariadas para ajustar el mejor modelo de dependencia entre productos, líneas de negocio y tipos de riesgo. La segunda es el análisis de las bondades de la diversificación de un portafolio que incluye productos con diferentes niveles de dependencia conjunta extrema; y, finalmente, la tercera es el procedimiento para constatar que las estimaciones del CE son, en general, distintas (y en su mayoría superiores) al requerimiento regulatorio establecido por las reglas de capitalización locales.

Como todo procedimiento estadístico, la metodología aquí propuesta no se encuentra exenta de limitaciones. Para empezar, por el lado del riesgo de crédito, las estimaciones están seriamente afectadas por la falta de registros de largo plazo confiables. Por su parte, en el caso de riesgo operacional, la efectividad de cualquier metodología para de medición de riesgo depende completamente de la cantidad y la calidad de información realista sobre eventos de pérdida adecuada, que para el caso de México en la mayoría de las instituciones financieras se encuentra en etapas iniciales de su proceso de construcción. En nuestro caso, esta carencia afecta seriamente la efectividad de los ajustes de las cópulas o de los métodos de valores extremos debido a las propiedades asintóticas de sus estimadores. No hay duda que con una muestra mayor, la calidad de las medidas de riesgo mejoraría sustancialmente y ayudaría a reforzar los supuestos establecidos.

La mayor virtud de la metodología aquí expuesta es la gran flexibilidad que ofrece al administrador de riesgos para modelar no sólo la dependencia existente entre los factores de riesgo sino, también, entre las líneas de negocio y tipos de riesgo: un aspecto que no es posible encontrar en los modelos tradicionales.

References

- Alexander, C. and J. Pezier (2003). On the Aggregation of Market and Credit Risks. ISMA Centre Discussion Papers in Finance No. 2003-13, Octubre, University of Reading, Reading UK.
- BCBS (2001). The New Basel Capital Accord, second consultative paper. Bank for International Settlements, Basel, Switzerland.
- BCBS - Joint Forum (2003). Trends in risk integration and aggregation. Bank for International Settlements, Basel, Switzerland.
- BCBS - Joint Forum (2010). Developments in Modelling Risk Aggregation. Bank for International Settlements, Basel, Switzerland.
- BCBS - Joint Forum (2004). International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. A Revised Framework. Bank for International Settlements, Basel, Switzerland.
- Biggs, D., B. De Ville and E. Suen (1991). A method of choosing multiway partitions for classification and decision trees. *Journal of Applied Statistics*, 62, pp. 18-49.
- Caner, M. L. Kilian (2001). "Size Distortions of Tests of the Null Hypothesis of Stationarity: Evidence and Implications for the PPP Debate". *Journal of International Money and Finance*, 20, 639-657.
- CNBV (2010). Disposiciones de Carácter General Aplicables a las Instituciones de Crédito (Circular nica de Bancos). Comisión Nacional Bancaria y de Valores, México.
- Cox, J.C., S.A. Ross y M. Rubinstein (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics* 7, pp. 229-263.
- Crosbie, P. and J. Bohn (2002). Modelling Default Risk. KMV working paper.
- Crouhy, M., D. Galai y R. Mark (2000). A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, 24, pp. 59-117.
- De Andrade, F. and L. Thomas (2004). Structural Models In Consumer Credit. Risk and Insurance 0407001, EconWPA.
- Dev, A. (2004). Economic Capital: A practitioner guide. Risk Books.
- Díaz, A. (2007). Modelo de cálculo de Capital Económico por Riesgo de Crédito aplicando Cópulas Elípticas Generalizadas, Cópulas Agrupadas y Teoría de Valores Extremos. Tesis de doctorado, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Distrito Federal, México
- Díaz, A. y J.C. Ramírez (2009). Una metodología basada en cópulas y valores extremos para estimar el capital económico requerido de un portafolio de créditos al menudeo. *Revista de Análisis Económico*, 24(2), pp. 95-132.
- Dimakos, X., and K. Aas (2003). Integrated Risk Modeling. Working Paper, Norwegian Computing Centre, December, Oslo, Norway.
- Embrechts, P., A.J. McNeil and R. Frey (2005). Quantitative Risk Management. Princeton Series in Finance, USA.
- Heath, D., R.A. Jarrow and A. Morton (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60(1), pp. 77-105
- Ho, T.S.Y. and S.B. Lee (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41(5), pp. 1011-1030.
- Hull, J. (2006). Options, Futures and Other Derivatives. 6ta Edición, Nueva Jersey, Prentice Hall.
- Kostadinov, K. (2005). Non-parametric estimation of elliptical copulae with application to credit risk. Research paper, Munich University of Technology.
- Lelyveld, I., M. Boughanmi, H. Broekhoven, H. Everts, M. Gelderman, O. Jones, P. Klaassen, H. Liersch, R. Monnik, A. Pouw, G. Siegelae, Henrico Wanders (2006). A Survey of Economic Capital Model Implementation. In Economic Capital Modelling: Concepts, Measuring and Implementation. Editado por Iman van Lelyveld.
- Matten, C. (2000). Managing Bank Capital: Capital Allocation and Performance Measurement. 2da Edición. Wiley.
- Merton, R.C. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". *Journal of Finance*, Vol. 29, pp. 449-470.
- Perli, R. and W. Nayda (2004). Economic and Regulatory Capital Allocation for Revolving Retail Exposures. -*Journal of Banking & Finance*, 28(4), pp. 789-809.
- Perron, P. and S. Ng. (1996). Useful Modifications to Some Unit Root Tests with Dependent Errors and their Local Asymptotic Properties. *Review of Economic Studies*, Vol. 63, pp. 435-463.
- Pezier, J. (2003). Application-Based Financial Risk Aggregation Models. ISMA Centre Discussion Papers in Finance No. 2003-11, Septiembre, University of Reading, Reading UK.
- Saita, F. (2007). Value at Risk and Bank Capital Management. Academic Press Advanced Finance Series, Elsevier Inc.
- Schwert, W. (1989). Test for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation. *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, pp. 147-159.