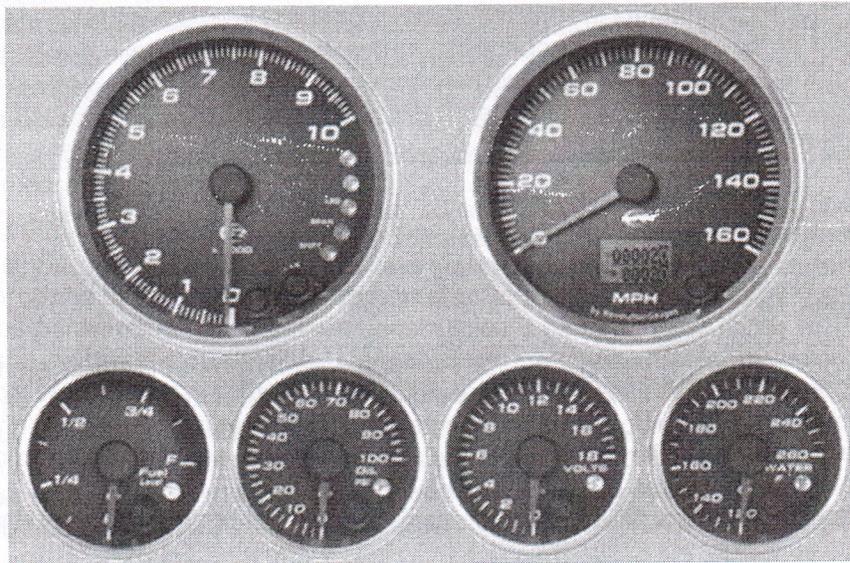


Sobre la Homogeneización de Indicadores de Riesgo Operacional



Manuel González F. - Adán Díaz H.

México, Junio, 2011



REGISTRO: 03-2011-061510301000-01
TITULO : SOBRE LA HOMOGENEIZACION DE
INDICADORES DE RIESGO OPERACIONAL

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
TIPO TRAMITE :REGISTRO DE OBRA
PRESENTACION: HOJAS

CERTIFICADO

Registro Público del Derecho de Autor



GOBIERNO
FEDERAL

SEP

Para los efectos de los artículos 13, 162, 163 fracción I, 164 fracción I, 168, 169, 209 fracción III y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **OBRA** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, con los siguientes datos:

AUTORES: DIAZ HERNANDEZ ADAN
GONZALEZ FERNANDEZ MANUEL

TITULO: SOBRE LA HOMOGENEIZACION DE INDICADORES DE
RIESGO OPERACIONAL

RAMA: LITERARIA

TITULARES: DIAZ HERNANDEZ ADAN
GONZALEZ FERNANDEZ MANUEL

Con fundamento en lo establecido por el artículo 14 fracciones I y II de la Ley Federal del Derecho de Autor, el presente certificado no ampara las ideas en sí mismas, las fórmulas, soluciones, conceptos, métodos, sistemas, principios, descubrimientos, procesos e invenciones de cualquier tipo; el aprovechamiento industrial o comercial de las ideas contenidas en las obras.

Con fundamento en el artículo 3° de la Ley Federal del Derecho de Autor el presente certificado ampara única y exclusivamente la obra original Literaria.

L.F.D.A.- Artículo 168.- Las inscripciones en el registro establecen la presunción de ser ciertos los hechos y actos que en ellas consten, salvo prueba en contrario. Toda inscripción deja a salvo los derechos de terceros. Si surge controversia, los efectos de la inscripción quedarán suspendidos en tanto se pronuncie resolución firme por autoridad competente.

Número de Registro: 03-2011-061510301000-01

México D.F., a 24 de junio de 2011

EL SUBDIRECTOR DE REGISTRO DE OBRAS Y CONTRATOS


ARTURO NOE CALDERON AGUILAR



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
INSTITUTO NACIONAL
DEL DERECHO DE AUTOR
REGISTRO PÚBLICO




INDAUTOR
Instituto Nacional del Derecho de Autor

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

MÉXICO

Sobre la Homogeneización de Indicadores de Riesgo Operacional (Ver. 1.1)



Manuel González F. - Adán Díaz H.

México, Julio, 2011

Historia del documento

Versión	Fecha	Comentarios
1.0	2011.06.14	Versión inicial, © Copyright RPDA 03-2011-061510301000-01
1.1	2011.07.18	Versión modificada de la versión inicial de 2011.06.15.

Sobre la Homogeneización de Indicadores de Riesgo Operacional

Manuel González F. - Adán Díaz H.

Reseña

Es práctica común de las organizaciones dar seguimiento a datos, parámetros e indicadores que guardan alguna relación, ya sea causal, de control, de desempeño, de negocio o de entorno, con los riesgos que su operación enfrenta, con la intención de anticipar, a través del seguimiento a sus niveles y tendencias, posibles cambios en el nivel de exposición a sus riesgos asociados.

Sin embargo su medición usualmente permanece en la métrica nativa, demandando información de contexto para su interpretación y dificultando la confección de indicadores agregados capaces de combinar distintas métricas.

Esta investigación tiene por objetivo discutir las implicaciones de algunos mecanismos convencionales de rescalamiento/ normalización y proponer un procedimiento de homogeneización basado en el tratamiento probabilista de los datos, parámetros e indicadores construibles, de manera que la función de correspondencia entre la métrica original y los valores transformados incorpore su comportamiento distribucional y las relaciones de dependencia con otros indicadores.

Palabras clave: riesgo operacional, indicador de seguimiento, indicador de riesgo, correlación de rango, homogeneización, rescalamiento, normalización, estandarización.

1. Introducción

Los riesgos operacionales rara vez son gestionables en forma directa. Por ejemplo, el riesgo implicado en las actividades de lavado de dinero (blanqueo de capitales), esencialmente materializado en la imposición de multas por parte del regulador y en el lucro-cesante resultante de la reducción transaccional impuesta por el mercado a la institución –al margen de consideraciones de índole ética–, no es observable de manera directa; de hecho, es virtualmente imposible identificar los recursos captados en la institución que son de procedencia ilícita.

Así pues, el conjunto de acciones que la entidad puede emprender en la gestión de ese riesgo son ajenas a él; en el mejor de los casos podría decirse que están indirectamente vinculadas con él y apuntan a “afinar” la capacidad para detectar las transacciones que pudieran dar lugar a sospecha respecto de la licitud de su procedencia.

Ellas son, convencionalmente, las encaminadas a mejorar tanto el grado de conocimiento del cliente y de identificación de su patrón habitual de comportamiento –a fin de detectar las transacciones que no se corresponden con dicho patrón–, como las habilidades de los ejecutivos para identificar dichos patrones y detectar tales anomalías. Son éstas las variables observables y, por tanto, referencia para la confección de indicadores para ese riesgo.

Son entonces, los indicadores de seguimiento, índices contruidos a partir de variables extraídas de los procesos, cuyo comportamiento está relacionado (correlacionado) con el nivel de riesgo asumido. Son variables mensurables, observables, y que aportan información que permite hacer inferencia acerca del nivel de exposición al riesgo al que están vinculados.

Es práctica común de las organizaciones dar seguimiento a datos, parámetros e indicadores que guardan alguna relación, ya sea causal, de control, de desempeño, de negocio o de entorno, con los riesgos que su operación enfrenta. Sin embargo, las más de las veces, su medición usualmente permanece en la métrica nativa, demandando información de contexto para su interpretación (vgr.: referencias de mercado u objetivos de gestión), y una vasta capacidad analítica para inferir los efectos de su acción simultánea en el nivel de exposición a sus riesgos asociados.

Esta práctica contempla la concurrencia de diversas unidades de medida, pudiendo convivir en un mismo informe temas dimensionados en divisa, tiempo, distancia, proporción, escala, calificación, número de incidencias, aserción lógica, asignación cualitativa, índice, etc. Asimismo, además de la contribución propia de cada indicador a la interpretación de la evolución de su(s) riesgo(s) asociado(s), puede haber interés en la confección de indicadores agregados que engloben, en un mismo valor, temas afines o de alguna manera relacionados. Por ejemplo, puede desearse construir un único indicador de fraude que integre las diferentes modalidades de esta práctica ilícita, o agregar en un solo indicador todos aquellos que competen a un mismo departamento o unidad de gestión, a fin de evaluar con ello el desempeño del gestor.

En tales casos, la aritmética directa entre los indicadores agregados no permite la adición cuando las unidades de medida difieren. Es necesario, pues, pensar en un mecanismo de homogeneización de medidas que ponga en correspondencia las métricas nativas con una métrica unificada, en la cual puedan determinarse umbrales de tolerancia, de alerta y de gestión, cuya lectura e inferencia de los niveles de exposición en sus riesgos asociados sea homogéneamente comparable.

En esta nota técnica se discuten –brevemente– las características e implicaciones de algunos mecanismos convencionales de rescalamiento, normalización o estandarización. Asimismo, se propone un procedimiento de homogeneización basado en el tratamiento de los datos y de los parámetros e indicadores construibles a partir de ellos como variables aleatorias. Se busca determinar la función que ponga en correspondencia los valores originales (dominio) con sus valores transformados (rango), que al propio tiempo tome en cuenta la densidad (concentración o dispersión) con que ocurren, y les compense de manera inversamente proporcional y uniformemente distribuida en un intervalo acotado.

2. Rescalamiento, normalización y estandarización convencionales

El reconocimiento de diferentes unidades de medida en la preservación de las métricas nativas de los datos, invoca la necesidad –o conveniencia– de introducir un mecanismo paralelo de homogeneización que facilite su lectura, interpretación y comparación mediante el uso de una métrica común.

Es práctica frecuente acudir a recursos como el rescalamiento, la normalización, o la estandarización de las series expresadas en su métrica nativa para transformarles en valores re-expresados en métricas semejantes o comparables, y acotados a un rango preestablecido.

El **rescalamiento** consiste en añadir/ extraer una constante y multiplicar/ dividir el resultado por otra constante. Es el tipo de transformación aplicable en la conversión entre distintas unidades de medida (vgr.: grados Fahrenheit a Celsius). Este tipo de rescalamiento es conocido como transformación en localización y escala. Su regla de correspondencia es:

$$x^* = a(x + b),$$

donde x y x^* representan los valores originales y transformados, respectivamente, en tanto que las constantes de escala y localización están dadas por los reales a y b .

Antes de continuar con la identificación de los tipos de rescalamiento, normalización y estandarización considerados, conviene precisar la notación a utilizar. Dada una serie de n observaciones x_1, \dots, x_n , sus valores mínimo y máximo se representan mediante m y M , respectivamente. Por su parte, las estimaciones puntuales de su media y desviación estándar se denotan respectivamente por $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$. El superíndice “*” se utiliza para referirse a la serie transformada¹.

Una forma particular de rescalamiento consiste en transformar los datos originales mediante su división por una medida de tendencia central. Es decir,

$$x_i^* = x_i / \hat{\mu}.$$

Otra forma curiosa de rescalamiento es la resultante de restar de cada valor el promedio aritmético de la serie, multiplicar el resultado por el cociente de la desviación estándar deseada entre la observada en los datos, y sumar el producto al valor deseado del promedio de los datos transformados. Este proceder da como resultado una nueva serie con promedio y desviación estándar prestablecidos. La regla de correspondencia de la función utilizada es²:

$$x_i^* = (x_i - \hat{\mu}) \frac{\hat{\sigma}^*}{\hat{\sigma}} + \hat{\mu}^*$$

Cuando se interpreta la serie de datos como un vector n -dimensional, su **normalización** consiste en dividir sus coordenadas entre su norma. Esto es,

$$x_i^* = x_i / \|x\|,$$

donde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

También se le conoce con el nombre de normalización (*minimax*) al rescalamiento de una serie resultante de sustraer de todos los elementos el valor mínimo de la serie; dividir la diferencia entre la extensión del dominio (máximo - mínimo); multiplicar el cociente resultante por la extensión del rango deseado (máximo deseado - mínimo deseado) y añadir al resultado el valor mínimo deseado, lo que asegura su transformación a valores comprendidos entre los nuevos valores mínimo y máximo elegidos. La regla de correspondencia de la función es:

$$x_i^* = (x_i - m) \frac{M^* - m^*}{M - m} + m^*.$$

El concepto de **estandarización**, introducido en la ciencia estadística, consiste en la sustracción de una medida de localización y la división del resultado por una medida de escala.

¹ Comúnmente se utiliza el promedio de los datos como estimador de la media, sin embargo, alternativamente se puede recurrir al uso de otras medidas de tendencia central como la mediana o la moda y sus correspondientes estimadores empíricos. La estimación de la desviación estándar se puede hacer mediante la raíz cuadrada del estimador insesgado de la varianza, pudiendo recurrirse a alguna otra medida de escala como el rango intercuantil o la desviación absoluta media, por mencionar sólo algunas.

² La idea básica detrás de esta transformación se puede deducir suponiendo que la serie de datos representa una serie de observaciones independientes e idénticamente distribuidas (muestra aleatoria) de una cierta variable aleatoria (v.a.) X . En consecuencia, se puede escribir el valor esperado de la serie transformada como $E[X^*] = (E[X] - \hat{\mu}) \frac{\hat{\sigma}^*}{\hat{\sigma}} + \hat{\mu}^* = (0) \frac{\hat{\sigma}^*}{\hat{\sigma}} + \hat{\mu}^* = \hat{\mu}^*$, y su correspondiente varianza como $Var[X^*] = Var \left[(X - \hat{\mu}) \frac{\hat{\sigma}^*}{\hat{\sigma}} \right] = Var[X] \left(\frac{\hat{\sigma}^*}{\hat{\sigma}} \right)^2 = \hat{\sigma}^{*2}$.

Si la serie contiene, por ejemplo, variables aleatorias que siguen una distribución Normal, al sustraer de todos los elementos su media y dividir el resultado entre la raíz cuadrada de su varianza, se obtienen datos transformados que siguen una distribución Normal con media nula y varianza unitaria. La regla de correspondencia utilizada es de la forma:

$$x_i^* = \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$$

3. Acotando la transformación de valores extremos

Un primer problema que plantea la homogeneización de los indicadores de riesgo por la vía de aplicarles cualquiera de los procedimientos descritos es el surgimiento ulterior de valores extremos en el dominio. Si bien se identifican valores mínimos/ máximos, promedios y desviaciones en las series originales, y se les utiliza como parámetros de transformación a rangos comparables conocidos al tiempo de la definición de la nueva métrica, pueden surgir con posterioridad valores fuera del dominio conocido cuyo valor transformado escape al rango deseado para los fines de homogeneización.

Un recurso relativamente socorrido para subsanar esta limitación ha sido el de definir la función de transformación en porciones diferenciadas del dominio: La porción conocida/esperada, en la que se aplica cierto procedimiento de rescalamiento, y la(s) porción(es) en la(s) que pudieran surgir valores extremos y en la(s) que se mantiene(n) constante(s) el(los) valor(es) mínimo/ máximo (o ambos) del rango deseado.

A manera de ilustración, considérese un rescalamiento del tipo *minimax* en el que expresamente se reconocen los valores mínimo y máximo de las series de valores correspondientes a n indicadores, los cuales se desea transformar a valores comprendidos en el intervalo $[0, 1]$. Bajo este procedimiento se busca una función de normalización \mathcal{N} , tal que cada elemento transformado n_{jt} pueda ser expresado como

$$n_{jt} = \mathcal{N}(v_{jt}, m_j, p_j)$$

donde v_{jt} representa el valor observado del j -ésimo indicador en el tiempo t , para $j=1, \dots, n$; y m_j y p_j representan, en términos de la tolerancia del gestor –o de los valores empíricos conocidos al tiempo de la definición de la función–, respectivamente, los valores “mejor” y “peor” asignados a v_{jt} .³

Así pues, \mathcal{N} se puede definir mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$n_{jt} = \mathcal{N}(v_{jt}, m_j, p_j) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } v_{jt} \text{ es igual o mejor que } m_j \text{ (mejor);} \\ (v_{jt} - m_j) / (p_j - m_j) & \text{si } v_{jt} \text{ se encuentra entre } p_j \text{ (peor) y } m_j \text{ (mejor);} \\ 1 & \text{si } v_{jt} \text{ es igual o peor que } p_j \text{ (peor).} \end{cases}$$

Los siguientes gráficos (Figura 1) ilustran las dos posibles formas que adquiere la función \mathcal{N} para los casos $p_j > m_j$ y $p_j < m_j$.

³ En virtud de que un indicador de riesgo puede denotar mejoría en su relación de exposición al riesgo asociado indistintamente de si su valor aumenta o disminuye, se han reemplazado los conceptos mínimo y máximo (y viceversa), por mejor o peor (según el caso), dando con ello lugar a dos funciones diferenciadas, aquélla en que el indicador denota mejoría si el valor de la variable disminuye, y aquella otra en que ocurre lo contrario.

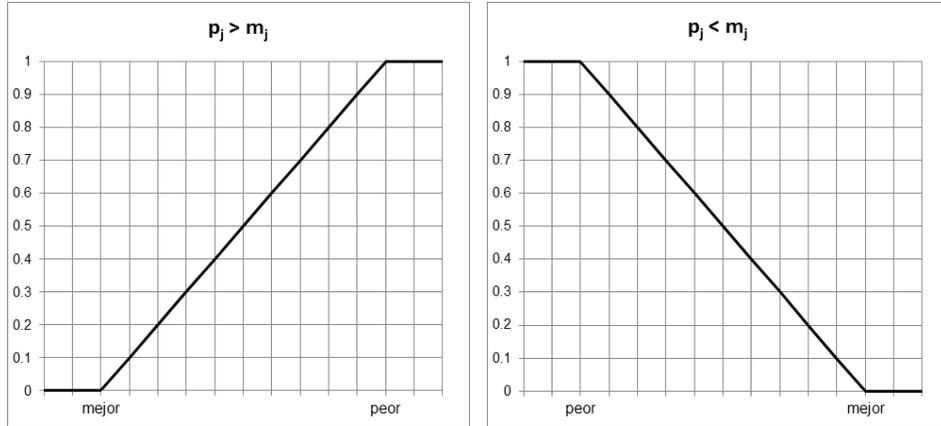


Figura 1. Gráficos de las dos formas que puede adquirir la función f

Incidentalmente, el gráfico resultante coincide con el de la distribución acumulada de probabilidad uniforme en el intervalo $[\pm\text{mejor}, \pm\text{peor}]$ (donde uno u otro signo aplican, respectivamente a cada gráfico), lo cual será una condición rescatable más adelante en el contexto de la transformación sugerida en esta nota técnica.

4. Linealidad y no-linealidad de la transformación

Si bien, este procedimiento de normalización elimina la posibilidad de que nuevos valores mejores/ peores a los umbrales mejor/ peor predefinidos salgan del intervalo dentro del cual interesa mantener a todos los datos transformados, adolece de las implicaciones de la linealidad de la transformación (característica propia de todas las transformaciones descritas en el epígrafe precedente). Tal linealidad implica el rescalamiento de la serie original, preservando los niveles de concentración/dispersión de datos de la serie original (ver Figura 2).

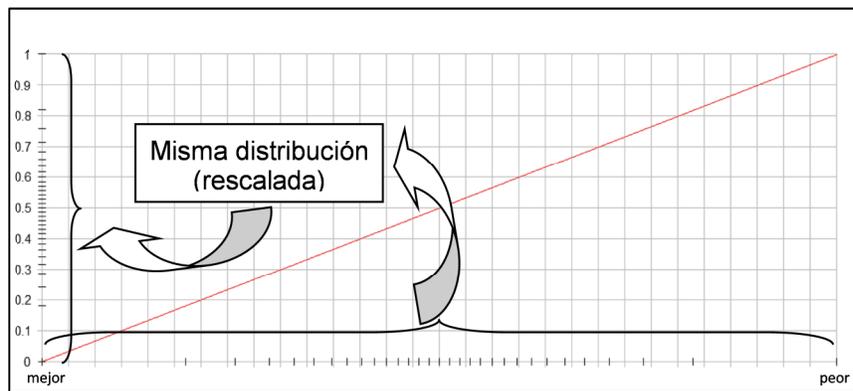


Figura 2. Transformación lineal con rescalamiento de la serie al intervalo $[0,1]$

Resulta pertinente preguntarse si es ese el comportamiento deseado en un proceso de homogeneización de las series de indicadores de seguimiento del riesgo, con fines de comparación o de agregación entre ellos. La respuesta que los autores de esta nota damos a tal cuestionamiento es que no.

El razonamiento subyacente se enfoca en tratar de dar el mismo nivel de sensibilidad a lo largo de todo el intervalo, con independencia del grado de concentración o dispersión de los datos en las series originales. En otras palabras, la función de transformación buscada deberá conseguir niveles de concentración/ dispersión inversamente proporcionales a los niveles de los datos originales, como lo ilustra la Figura 3.

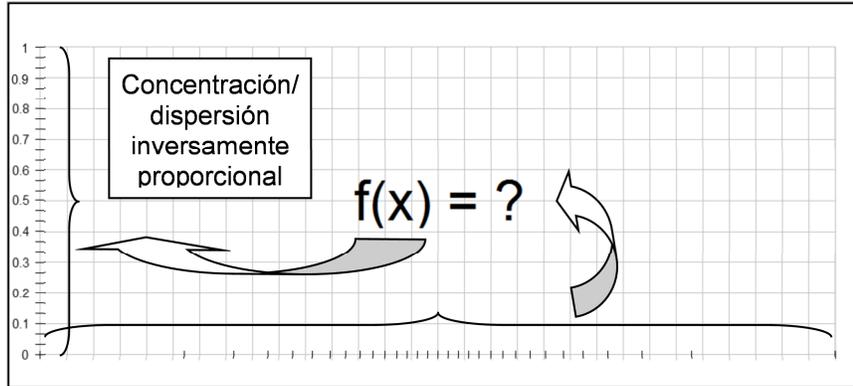


Figura 3. Objetivo de la función de transformación

El efecto buscado se consigue mediante el uso de una función **sigmoide** –del tipo arco-tangente, logística, tangente hiperbólica, función error, y de una amplia gama de funciones de distribución acumulada de probabilidad– como vehículo de transformación (ver Figura 4).

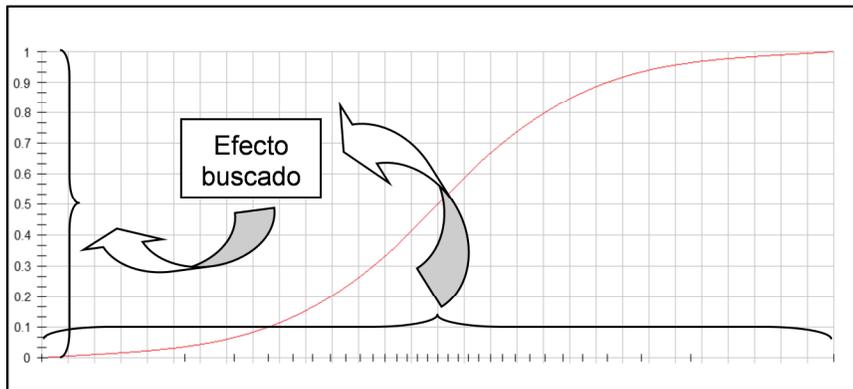


Figura 4. Función sigmoide que consigue el efecto buscado en la transformación

Entre algunas de las características interesantes de las funciones sigmoides (para los fines de esta nota) pueden citarse las siguientes:

- asumen valores reales en un intervalo continuo;
- son diferenciables;
- tienen un par de asíntotas (en la medida en que la variable independiente tiende a +/- infinito);
- su dominio y rango están perfectamente correlacionados (en el sentido de Spearman⁴).

A pesar de no haber sido explícitamente mencionado en los criterios de búsqueda de la función de transformación, una condición indispensable es que ésta sea monótona creciente/ decreciente, de manera que el rango de la función preserve/ invierta (según el sentido de la transformación) la estructura de orden de su dominio.

⁴ Cuando cada una de las variables es resultante de una función estrictamente monótona de la otra –no necesariamente lineal–, el coeficiente de correlación entre ambas es perfecto (+1 o -1). Para consultar con más detalle éste y otros aspectos relacionados con el concepto de medidas de dependencia, se recomienda el lector remitirse a los Anexos II y III.

Ello plantea dos situaciones dependientes del sentido del indicador original y del transformado: Cuando ambos se mueven en la misma dirección (i.e., indican mejoría, en términos del grado de exposición al riesgo a que están asociados al aumentar/ disminuir simultáneamente); y cuando ambos se mueven en direcciones opuestas (i.e., denotan mejoría cuando uno aumenta y el otro disminuye, o viceversa). Es decir que, cuando un dato sea menor que otro –e.g.: $x_1 < x_2$ –, en el primer caso lo sean también sus respectivos valores transformados –i.e., $f(x_1) < f(x_2)$ –, y en el segundo caso ocurra lo contrario –i.e., $f(x_1) > f(x_2)$.

La condición de monotonía (monotonicidad) queda entonces sintetizada, para ambos casos –creciente o decreciente, según la elección del signo– en la siguiente expresión:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \pm f(x_1) < \pm f(x_2), \text{ para todo } x_1, x_2 \text{ elementos del dominio de } f.$$

Es pertinente comentar que el uso de funciones sigmoideas en la transformación de series de datos es también un recurso utilizado en muchas aplicaciones⁵. En estricto apego a la intención de realizar un recuento de funciones de rescalamiento, normalización y estandarización convencionales (en el epígrafe correspondiente en esta nota), debieron haberse incluido las transformaciones sigmoideas. Sin embargo, se ha dejado su referencia hasta ahora en virtud de la especificidad de la naturaleza y el tipo de función a utilizar.

Si bien las transformaciones sigmoideas son no-lineales –y, siendo asintóticas en ambos extremos del rango, aseguran la inclusión en éste de cualquier valor extremo no previsto–, no se trata tan sólo de aplicar una transformación sigmoidea cualquiera –como podría ser el caso de una logística o una tangente hiperbólica convencionales–, sino de aquella que consiga el efecto específico buscado y citado en párrafos precedentes.

Al propio tiempo, el sólo uso de una transformación logística o hiperbólica cualquiera, con el único afán de restringir los valores transformados al rango (acotado) entre sus asíntotas, al inducir un cambio en la distribución de los datos podría distorsionar arbitrariamente su interpretación.

5. Los indicadores de seguimiento del riesgo como variables aleatorias

La consideración de los indicadores de seguimiento del riesgo como variables aleatorias permite introducir en el ejercicio a sus funciones de densidad y de distribución acumulada de probabilidad –esta última de tipo sigmoideo. El planteamiento ahora es encontrar la función que mejor satisface la exigencia de generar la transformación más uniforme posible.

Se puede demostrar (ver Anexo I) que los valores de funciones continuas de distribución acumulada de probabilidad se distribuyen uniformemente, lo que parece aportar la respuesta buscada. Es decir, el uso de la función de distribución acumulada de probabilidad de la variable aleatoria que tiene por datos muestrales a la serie original como la función de transformación de los datos de la propia serie, da por resultado valores muestrales de otra variable aleatoria que sigue una distribución uniforme.

A manera de ejemplo, considérese la serie de datos de un específico indicador cuyos valores conocidos se encuentran comprendidos en el intervalo $[0, 8.6] \times 100$, distribuidos según el histograma y distribución empírica ilustrados en la Figura 5, y considérense tanto la función de ajuste de su función de distribución acumulada (f.d.) como la función de densidad de probabilidad derivada de su ecuación diferencial ordinaria, ilustradas en el mismo gráfico.

⁵ Por ejemplo, en el área de inteligencia artificial, los modelos de clasificación basados en redes neuronales artificiales emplean funciones sigmoideas como funciones de activación en las distintas capas de la red (ver, por ejemplo, Marsland, 2009).

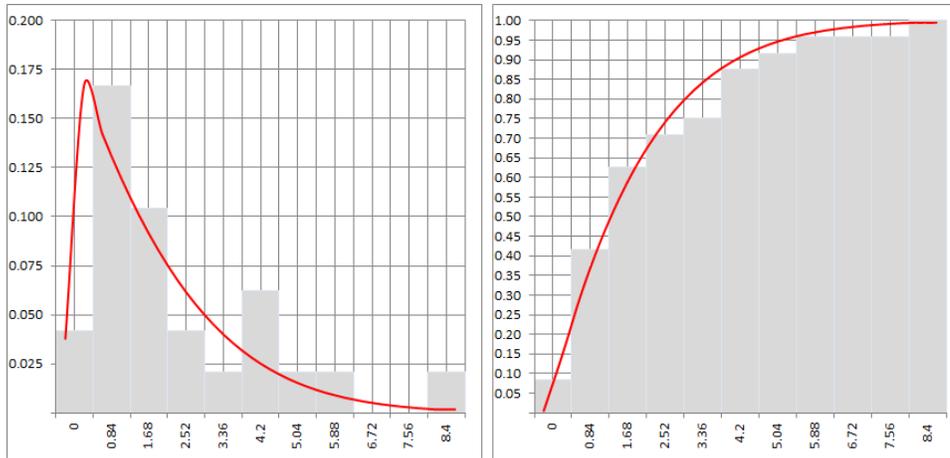


Figura 5. Histograma, distribución empírica y sus funciones ajustadas de densidad y de distribución para una serie de datos de un específico indicador de riesgo (Serie I)

El uso de la f.d. (ajustada) como la función de transformación de los datos del indicador da por resultado valores transformados cuyos histograma y distribución empírica, así como sus respectivas funciones de densidad y de distribución acumulada de probabilidad teóricas, se ilustran en la Figura 6.

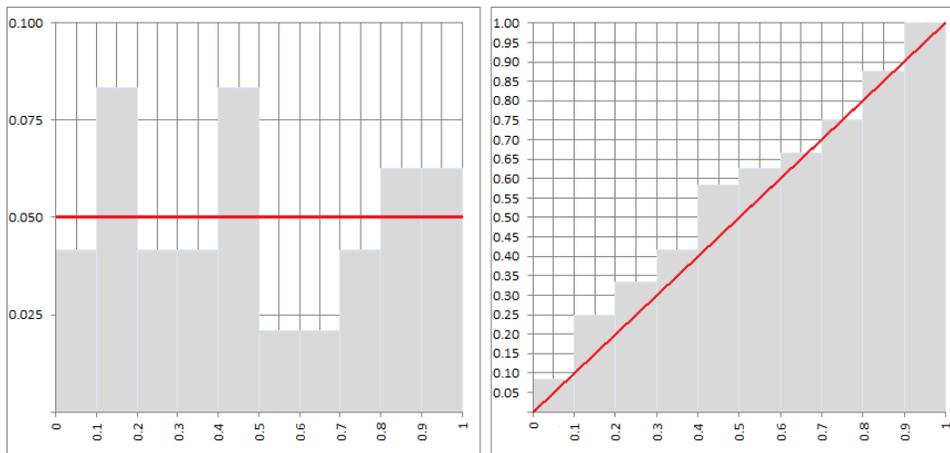


Figura 6. Histograma, distribución empírica y sus funciones teóricas de densidad y de distribución para los valores transformados

Los resultados obtenidos en este ejemplo parecen ser consistentes con el postulado teórico de que los valores transformados a través de una f.d. continua se distribuyen de manera uniforme.

Asimismo, una vez considerados los indicadores de seguimiento del riesgo como variables aleatorias y re-expresados sus valores en términos de probabilidades, todo el vasto acervo herramental aportado por la teoría de probabilidades está disponible para apoyar el análisis, la manipulación, la inferencia y su algoritmia subyacente.

6. Homogeneización de indicadores mediante su función de distribución acumulada

El uso de la f.d., además de contribuir con las características propias de una transformación sigmoidea, aporta al ejercicio una terna de atributos de sumo interés.

El primero es que el rango de todas las transformaciones aplicables al universo de los indicadores sujetos a tal reconversión está siempre contenido en el intervalo $[0, 1]$ –bien sean $[0, 1)$ o $(0, 1]$ en los casos de distribuciones de una cola, o $(0, 1)$ en el de dos colas.

El segundo es el de no requerir juicios de valor para determinar los umbrales –mejor y peor, resultantes de las expectativas del gestor– en el dominio de la función a cuyas imágenes asignarles los límites del intervalo constitutivo del rango de la función.

El tercero –y quizá el más importante–, es el de homologar la interpretación de sus valores. Al ser su valor transformado equivalente a la probabilidad de que el indicador tome un valor menor o igual a su valor observado, otorga a la comparación entre indicadores la característica de homogeneidad anhelada. Es decir, todos los valores de indicadores –con independencia de su métrica nativa– para los cuales su valor transformado sea el mismo, tienen en común compartir la misma probabilidad (acumulada) de ocurrencia. Puesto en otros términos, tienen la misma probabilidad (el complemento a la unidad de la probabilidad acumulada) de que sus valores sean rebasados.

Considerando entonces las características de monotonicidad y diferenciabilidad, acotamiento e igualdad de rango, independencia de juicios de valor, de uniformidad en la distribución y de homogeneidad interpretativa de sus valores, propias de las transformaciones mediante el uso de la f.d., se propone la adopción de este recurso con fines de obtención de indicadores de seguimiento del riesgo paralelos a los originales en su métrica nativa. Ello, tanto con fines de interpretación de los propios indicadores, ya en forma aislada o en su comparación con otros, como en la confección de indicadores derivados, resultantes de la agregación de varios de ellos.

7. Consideraciones de cálculo y ajuste

Un tema central en la consecución del objetivo aquí planteado es, sin lugar a dudas, la elección de la regla de correspondencia de la función de ajuste de la f.d. En virtud de la multiplicidad de formas de comportamiento esperables en un colectivo amplio de distintos tipos de indicadores de riesgo, una medida plausible para minimizar el uso de múltiples parámetros y reglas de correspondencia de las funciones elegidas es buscar un conjunto reducido de familias de funciones de distribución y restringir a ese acotado entorno la búsqueda del mejor ajuste. Una característica deseable de las ff.dd. a seleccionar se puede asociar a la facilidad que proporcionan las familias donde tanto la f.d. como su inversa tienen soluciones analíticas⁶.

Asimismo, no debe perderse de vista el propósito primordial del ejercicio: compensar el grado de concentración/ dispersión de los datos originales al tiempo de su transformación.

⁶ En el caso en que no se tienen soluciones analíticas es necesario recurrir a métodos numéricos ya sea para el cálculo mismo de la f.d. o bien para la obtención de su función inversa. Sin embargo, la aceptación de la solución de las ecuaciones por métodos numéricos introduce implicaciones de cálculo y almacenamiento que deben ser consideradas. Las ff.dd. ajustadas a las series de datos deben ser revisadas, calibradas, replanteadas y redefinidas con cierta periodicidad –a fin de recoger el comportamiento reciente del indicador (ya que éste es dinámico y sus valores están expuestos a sesgos históricos). Cada cambio en la función de ajuste implica el recálculo en retrospectiva de sus valores transformados, por lo que no se recomienda el almacenamiento de estos, sino sólo de las series originales y de los datos indicativos del tipo de función a aplicar y de los parámetros que definen su regla de correspondencia. De esta manera, se asegura el uso de la más reciente versión de la f.d. al tiempo de su utilización con fines de inclusión en algún ejercicio de análisis, comparación, inferencia o informe. La inclusión, por tanto, de ff.dd. no resolubles analíticamente impone la consideración de un mecanismo diferenciado de almacenamiento y cálculo, en adición al genérico usado en la mayoría de los demás casos en que las ff.dd. sean analíticamente resolubles.

A diferencia de los ejercicios de estimación de requerimientos de capital por riesgo operacional, en los que interesa capturar, tomar prestados o simular eventos extremos (colas pesadas) a fin de obtener una medida conservadora del valor en riesgo, dado un nivel pre-determinado de confiabilidad, el tema que nos ocupa pretende emular el comportamiento conocido de los datos de los indicadores asociados a los riesgos motivo de atención.

Deben, entonces, distinguirse aquellos indicadores que son susceptibles de registrar valores extremos de aquellos que no, o que ya cuentan en su historial con valores resultantes de eventos inesperados, a fin de monitorizar más frecuentemente a los primeros y reajustar la función de distribución de probabilidad que mejor los sintetiza. El uso, por ejemplo, de cimbras sobre umbrales (*POT*, por sus siglas en inglés) de la teoría de valores extremos (TVE), conducente a la fragmentación del dominio de la función en porciones a las que se ajustan diferentes funciones de distribución de probabilidad, sofisticada innecesariamente la algoritmia relativamente simple en la que se desea mantener el ajuste de las funciones de distribución y no se incluye en este ejercicio⁷.

Los valores extremos –inesperados– en un indicador de seguimiento del riesgo siempre serán transformados a posiciones extremas en el rango de la función, con independencia de la extensión de su dominio. Empero, su consideración al tiempo de la determinación del mejor ajuste para la función, puede distorsionar la consecución del objetivo de compensación de la concentración/ dispersión del historial de valores del dominio –el efecto de transformación producirá desplazamientos desproporcionales de los valores más concentrados hacia la porción transformada de la cola de la función de densidad de los datos originales.

Escapa al alcance de esta nota la determinación del criterio de mejor ajuste. Sin embargo, como procedimiento simple para la estimación de alguna familia distribucional, el método de momentos puede representar una alternativa útil. Este proceder considera la coincidencia de algún(unos) momento(s) de la variable aleatoria con su(s) momento(s) muestral(es).⁸

También escapa al alcance de esta nota la identificación de las familias de ff.dd. que deberán considerarse en la búsqueda del mejor ajuste de las distribuciones empíricas de los datos. Se entiende que este ejercicio está fuertemente condicionado por la naturaleza y comportamiento de los propios datos, así como también del grado de sofisticación que pretenda alcanzar quien realice el ejercicio.

8. Proporcionalidad entre indicadores y sus riesgos asociados

Entre las varias características que debe satisfacer un buen indicador de riesgo quizá la más importante sea la de guardar proporcionalidad con el riesgo al que hace referencia o, dicho en otras palabras, que exista un cierto grado de correlación entre las series de valores del indicador y las de las pérdidas relativas al riesgo de referencia. En condiciones normales, donde las series a comparar se encuentran en su métrica nativa, la dependencia entre variables se realiza convencionalmente mediante el uso del coeficiente de correlación lineal de Pearson.

⁷ En la literatura existen varias referencias importantes a la TVE y su aplicación en el área de las finanzas cuantitativas y técnicas actuariales que el lector puede consultar (ver por ejemplo Embrechts et al, 1997).

⁸ El nivel de sofisticación y complejidad depende de los métodos de estimación utilizados. Las alternativas pueden ir desde técnicas de estadística clásica como la máxima verosimilitud y los mínimos cuadrados ordinarios hasta el uso de métodos bayesianos.

Las series de datos de pérdidas relativas a un determinado riesgo pueden ser operadas como indicadores –en este caso, de desempeño–, por lo que son también susceptibles de ser homogeneizadas a través de su transformación por la vía de la f.d. subyacente.

Ello, además de homologar los términos de comparación con sus indicadores asociados, permite de manera natural el uso del coeficiente de correlación de Spearman, mucho más robusto en la medida que admite la existencia de correlaciones perfectas en condiciones de no-linealidad (comonotonicidad/ contramonotonicidad). Asimismo, es consistente para capturar dependencia en cualquier punto del intervalo $[-1, 1]$ y está directamente vinculado con la cópula asociada, entre otras propiedades (ver Anexo II)⁹.

Asimismo, la condición de uniformidad en la distribución de los valores transformados, tanto de las pérdidas relativas al(a los) riesgo(s) implicado(s) como de su(s) indicador(es) asociado(s) permite describir la dependencia entre las variables aleatorias mediante el uso de cópulas, fortaleciendo aún más el recurso de homogeneización con fines de manejo y análisis de sus resultados, a través de un herramental analítico más robusto (ver Anexo III).

9. Efectos de la transformación

Con fines de ejemplificación, considérense un par de indicadores, el primero de los cuales, el utilizado como ejemplo en el epígrafe relativo al tratamiento de los indicadores como variables aleatorias (Serie I). Asimismo, considérese la serie de datos de otro específico indicador (Serie II) cuyos valores conocidos se encuentran comprendidos en el intervalo $[0, 3.15] \times 1,000$, distribuidos según el histograma y distribución empírica ilustrados en la Figura 7, así como la función de ajuste de su función de distribución acumulada de probabilidad y la función de densidad de probabilidad derivada de su ecuación diferencial ordinaria, ilustradas en el mismo gráfico.

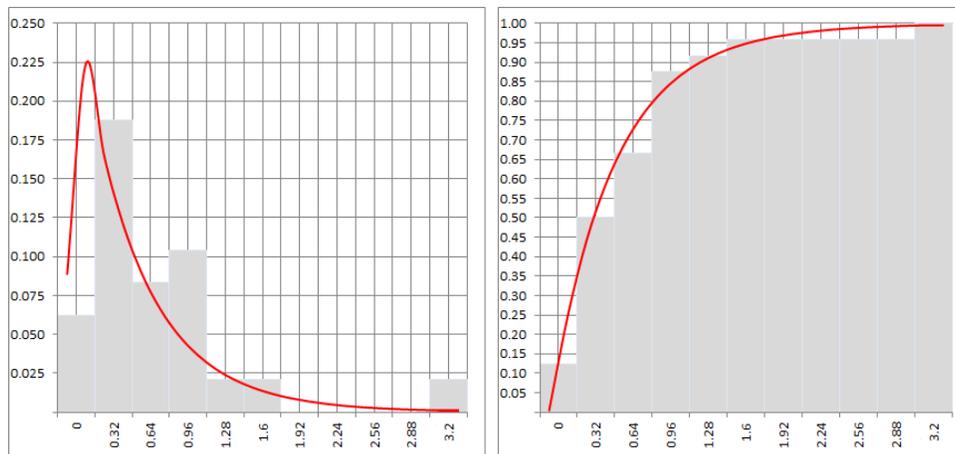


Figura 7. Histograma, distribución empírica y sus funciones ajustadas de densidad y distribución para la Serie II

Su transformación a través de la f.d. (ajustada) da por resultado valores transformados cuyos histograma y distribución empírica, así como sus respectivas funciones de densidad y de distribución teóricas, se ilustran en la Figura 8.

⁹ El coeficiente de correlación de Spearman, al tomar en cuenta las posiciones de orden (rangos) de los valores, y no a ellos, es mucho menos sensible que el coeficiente de correlación de Pearson a los valores extremos. Empero, esta limitante queda salvada en la medida en que estos dejan de ser tales como resultado de la transformación aplicada, la cual compensa inversamente los casos de alta concentración/ dispersión.

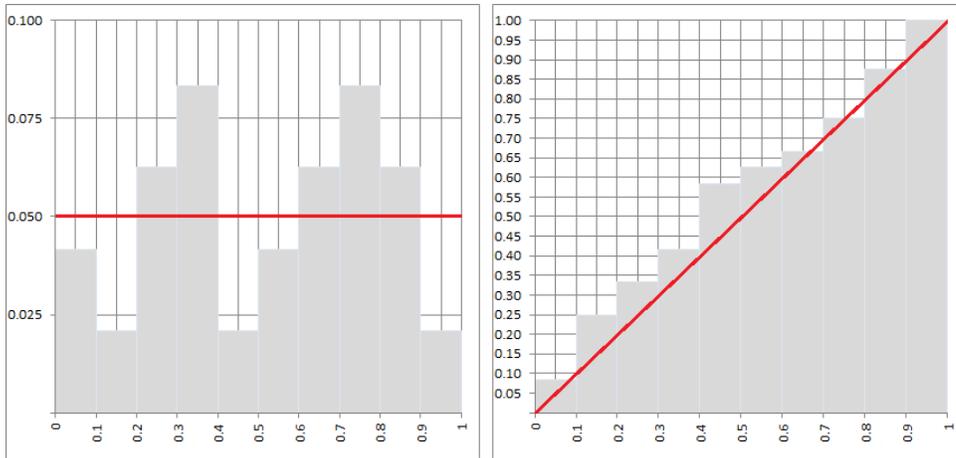


Figura 8. Histograma, distribución empírica y sus funciones teóricas de densidad y distribución acumulada de probabilidad de los valores transformados mediante el uso de la función de distribución ajustada

Sus respectivos gráficos de dispersión del dominio contra el rango de las funciones de transformación aplicadas a los datos de ambas series –coincidentes con los gráficos de las ff.dd. utilizadas en su transformación– se muestran en la siguiente ilustración (Figura 9).

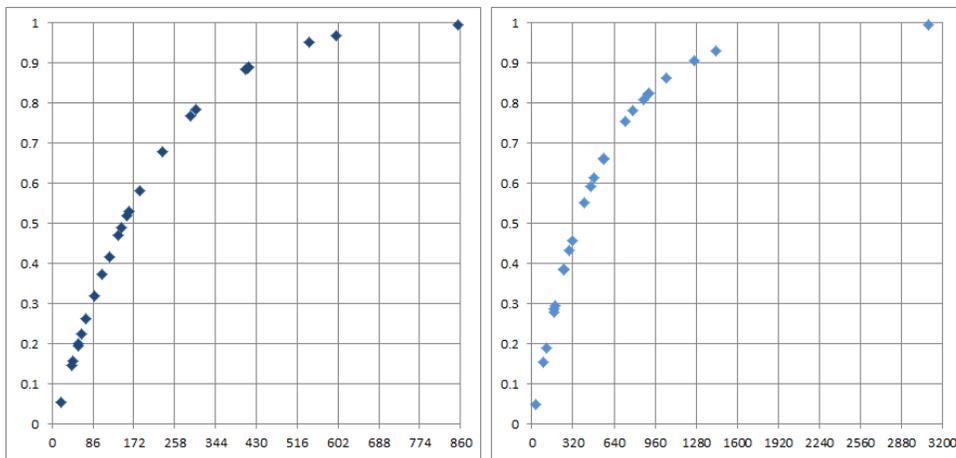


Figura 9. Gráficos de dispersión del dominio contra el rango de las transformaciones aplicadas a los datos de ambas series (Serie I –izquierda– y Serie II –derecha)

En la comparación de las densidades de probabilidad de ambas series se aprecian diferencias en los niveles de concentración/ dispersión de los datos. Mientras que la una (Serie I) muestra una menor concentración de sus datos en torno a su media, así como un valor extremo más cercano, la otra (Serie II) está más concentrada en la mayoría de sus observaciones, con un valor extremo más alejado.

En otras palabras, la variable aleatoria representada por la Serie I tiene una curtosis considerablemente menor que la de la Serie II. Esta condición se refleja en la manera en que la transformación a través de la función de distribución acumulada opera en uno y otro caso, tal como se ilustra en la Figura 10. El efecto de compensación del grado de concentración/ dispersión de los datos inducido por la función es menos pronunciado en la Serie I (eje horizontal) que en la Serie II (eje vertical).

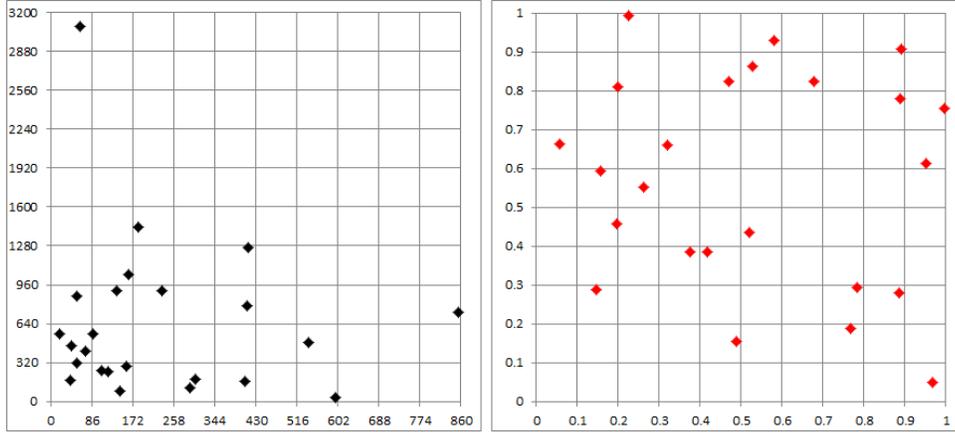


Figura 10. Gráficos de dispersión de los datos originales (izquierda) y transformados (derecha) de la Serie I (horizontal) contra la Serie II (vertical), para un total de 24 pares de observaciones

Ello confirma la intención de la transformación aplicada: Obtener una mayor dispersión en regiones más concentradas y una mayor concentración en regiones más dispersas. Así pues, al obtener una distribución de los datos mucho más uniforme se potencian las capacidades de análisis y comparación entre los indicadores así re-expresados.

Los gráficos que se muestran a continuación ilustran las evoluciones, tendencias y umbrales de las últimas 12 observaciones de las series utilizadas en la determinación de las funciones de transformación, correspondientes, respectivamente, a los valores originales de las series (Figura 11) y a sus valores transformados (Figura 12).

Es de notar que, en el primer caso, los umbrales de alerta y límite han tenido que ser fijados, en forma independiente, a partir del conocimiento por parte del gestor del comportamiento de cada uno de los indicadores, mientras que, en el segundo caso, los umbrales son iguales y han sido fijados en función de su nueva forma de interpretación: Su misma probabilidad.

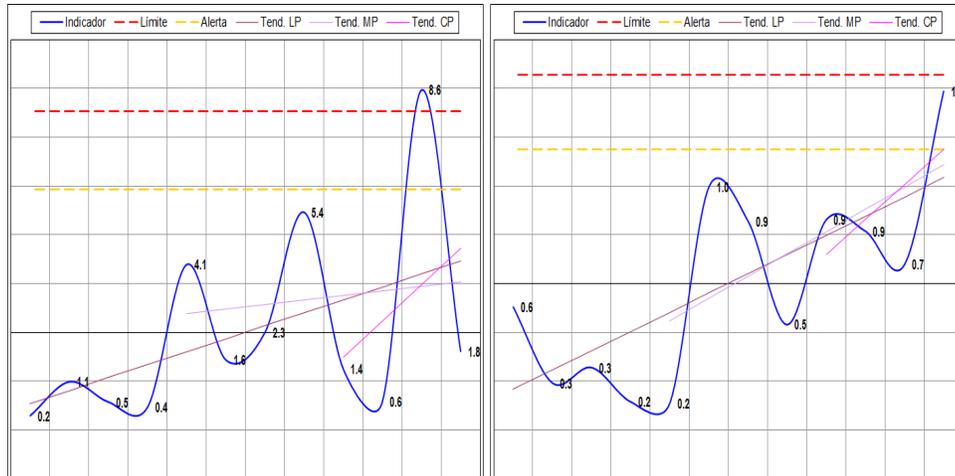


Figura 11. Gráficos de evolución de las últimas 12 observaciones de los indicadores seleccionados extraídas de las Series I (izquierda, expresadas en centenas) y II (derecha, expresadas en millares)

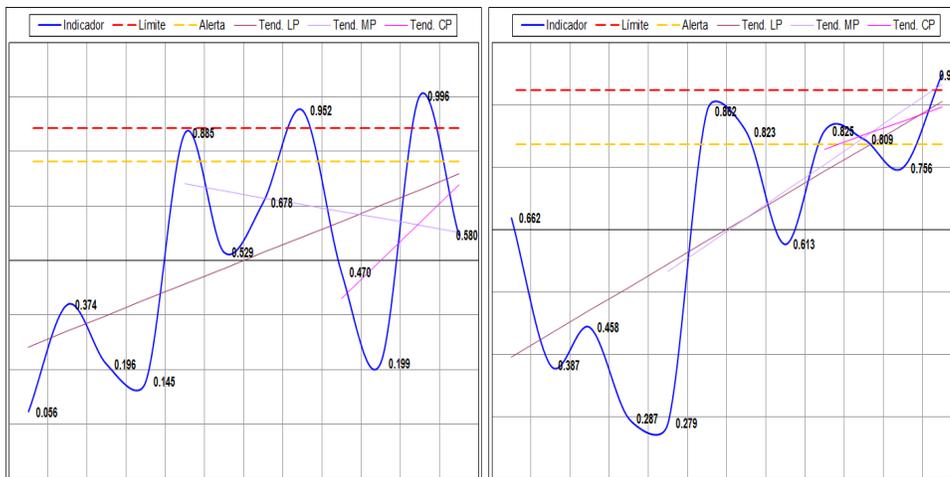


Figura 12. Gráficos de evolución de los valores transformados de las últimas 12 observaciones de los indicadores seleccionados extraídas de las Series I (izquierda) y II (derecha)

Cuando los umbrales de tolerancia/ apetito de riesgo (alertas y límites) sean determinados en función de su probabilidad en el contexto de los valores transformados –como en los dos ejemplos analizados (alerta al 80% y límite al 90%)–, será necesario recalculer sus valores equivalentes en las series originales, a través de la aplicación de las funciones inversas de las transformaciones aplicadas, a fin de no dar lugar a errores interpretativos de alertamiento y escalamiento según se consulte una u otra versión de las series.

10. Agregación de indicadores

Además de facilitar la interpretación y comparación entre indicadores, el procedimiento de transformación propuesto debe ser capaz de agregar varios indicadores con métricas nativas distintas en la confección de indicadores por proceso, función, departamento, tipo de causa o consecuencia, etc., obedeciendo a cualquier interés o criterio de agrupación.

Asimismo, en la definición de la regla de correspondencia de la función de agregación concurren una vasta gama de alternativas. No es propósito de esta nota incursionar en este amplio mundo del dominio del álgebra, la teoría de funciones o el análisis funcional, ni en las preferencias de los gestores de riesgo. La creatividad con la que pueden construirse tales funciones de agregación es ilimitada.

Sobre la base del ejercicio empírico trabajado a lo largo de las secciones anteriores, se mostrarán los resultados de un par de opciones simples e intuitivas en la confección de este tipo de indicadores. Para ello, se echará mano del par de ejemplos previamente utilizados en epígrafes precedentes (Series I y II).

Una primera consideración que debe tomarse en cuenta es el sentido de los indicadores implicados en el ejercicio de agregación. Si uno(s) indica(n) mejoría cuando disminuyen sus valores y otro(s) en el caso contrario, los valores de las series y sus umbrales de tolerancia en alguno de los dos casos deberán ser multiplicados por -1 previo a su transformación, a fin de que la evolución, la tendencia y los umbrales aplicables en el indicador derivado/agregado tengan la misma lectura. Los dos ejemplos utilizados con fines ilustrativos no se encuentran en esta situación, por lo que no es necesario inducir tal medida correctiva.

Sean, pues, x_i e y_i los valores transformados de las Series I y II, respectivamente, y sea z_i el resultado de su agregación, para toda $i=1, \dots, 24$ (número total de pares de observaciones).

Considérese como primera opción el indicador resultante de la ponderación de los valores de ambas series (donde la suma de los múltiplos utilizados en la ponderación es 1). Así, por ejemplo, sean 0.3 y 0.7 los múltiplos respectivos para los valores de las Series I y II en la ponderación (por así convenir a los intereses del gestor). Entonces,

$$z_i = 0.3x_i + 0.7y_i$$

Como segunda opción, considérese el indicador resultante de la selección, en cada período de observación, del valor máximo de cualquiera de los dos indicadores implicados en la agregación. Entonces,

$$z_i = \max\{x_i, y_i\}$$

Los indicadores resultantes de ambos criterios de agregación se ilustran en la Figura 13, en donde se han preservado los umbrales de tolerancia/ apetito de riesgo (alerta y límite) de las series transformadas objeto de agregación (80% y 90% respectivamente).

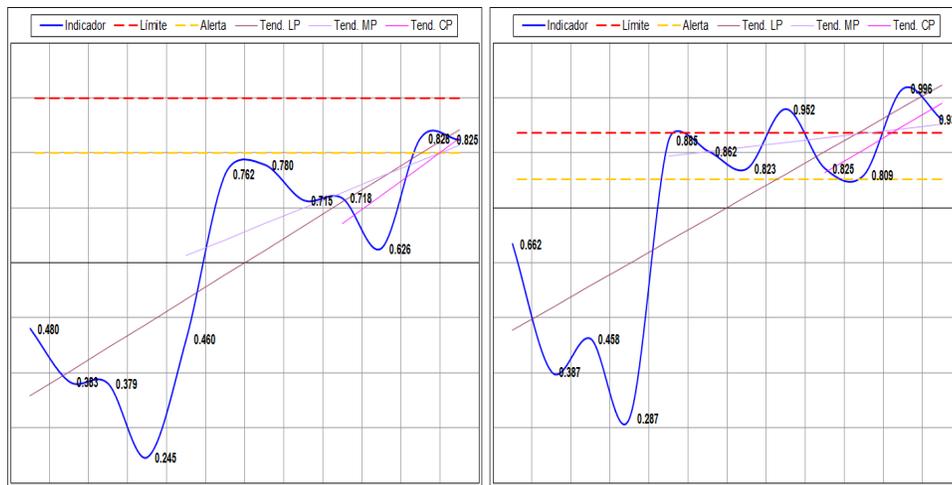


Figura 13. Gráficos de evolución de los valores obtenidos de la agregación de las últimas 12 observaciones de los indicadores seleccionados por vía de su ponderación (izquierda) y de la selección de sus máximos (derecha)

La primera opción introduce un efecto de suavizamiento que resalta las observaciones que tienen igual comportamiento (aumentan o disminuyen al unísono), predominando el comportamiento de la Serie II (en la proporción de 7:3), con un efecto de compensación en la situación contraria. La segunda, en cambio, potencia el reconocimiento de niveles altos, de manera tal que dispara las alertas cuando cualquiera de los indicadores implicados lo justifica y, cuando hay una situación de mejoría (vgr., primeros cuatro períodos), es realmente tal en el efecto global, ya que también en esos casos se han elegido los valores mayores.

Debe prestarse especial atención al procedimiento de determinación de los niveles de tolerancia/ apetito de riesgo (alertas y límites) del indicador agregado en los casos en que los umbrales de los indicadores implicados en el ejercicio de agregación difieran. Si en el caso del ejemplo ilustrado estos hubiesen sido diferentes, mientras en la primera opción es válido utilizar la misma regla de correspondencia de la función de transformación de los valores de la serie a sus umbrales, en el segundo no. Empero, no es objeto de esta nota incursionar en los criterios aplicables a la determinación de los umbrales en tales circunstancias.

Este tipo de ejercicio de agregación es sólo posible gracias a la introducción de un mecanismo de homogeneización que aisle a los indicadores de las limitaciones de lidiar con métricas incompatibles.

En adición a los análisis realizados hasta este momento, el marco general propuesto para la homogeneización de los indicadores de riesgo permite la inclusión de técnicas estadísticas más generales. Por ejemplo, es posible modelizar la dependencia entre indicadores y construir escenarios simulados que permitan ligar el comportamiento de los indicadores de riesgo con los niveles de pérdida para riesgos selectos. Dichas técnicas se relacionan con la aplicación de cópulas multivariadas (ver Anexo III).

Una de las consideraciones importantes a tomar en cuenta en la confección de indicadores agregados es el grado de dependencia existente entre las series de los indicadores implicados en el ejercicio. Dependiendo de los intereses del gestor, la concurrencia en el agregado de indicadores fuertemente vinculados (con un alto grado de dependencia) puede introducir sesgos. Eventualmente, puede ocurrir que, por el contrario, exista un deliberado interés en conjuntar indicadores dependientes en la búsqueda de agregaciones de indicadores con comportamientos semejantes.

Como ya se ha indicado, este documento de investigación se enfoca esencialmente en proponer las bases metodológicas de una solución al problema de homogeneización de indicadores de riesgo operacional. Sin embargo, vale la pena bosquejar un ejercicio simple sobre la modelización de la dependencia entre indicadores, debiendo dejar para un futuro trabajo de investigación su estudio y análisis a un mayor nivel de detalle, así como para conjuntos mayores de indicadores asociados a procesos y líneas de negocio específicos.

Considérense el par de indicadores utilizados en los ejemplos precedentes (Series I y II), e inclúyase la serie de datos de un tercer indicador (Serie III) cuyos valores conocidos se encuentran comprendidos en el intervalo $[0, 3.8] \times 100$, distribuidos según el histograma y distribución empírica ilustrados en la Figura 14. En el mismo gráfico se muestran, también, la función de ajuste de su función de distribución acumulada de probabilidad y la función de densidad de probabilidad derivada de su ecuación diferencial ordinaria.

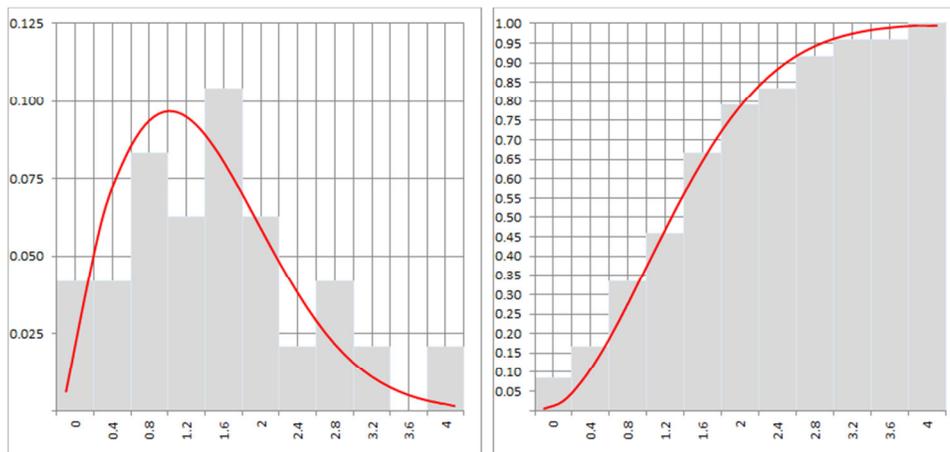


Figura 14. Histograma, distribución empírica y sus funciones ajustadas de densidad y de distribución para una serie de datos de un específico indicador de riesgo (Serie III)

El histograma y la distribución empírica resultantes de su transformación a través de la f.d. (ajustada), así como sus respectivas funciones de densidad y de distribución teóricas, se ilustran en la Figura 15.

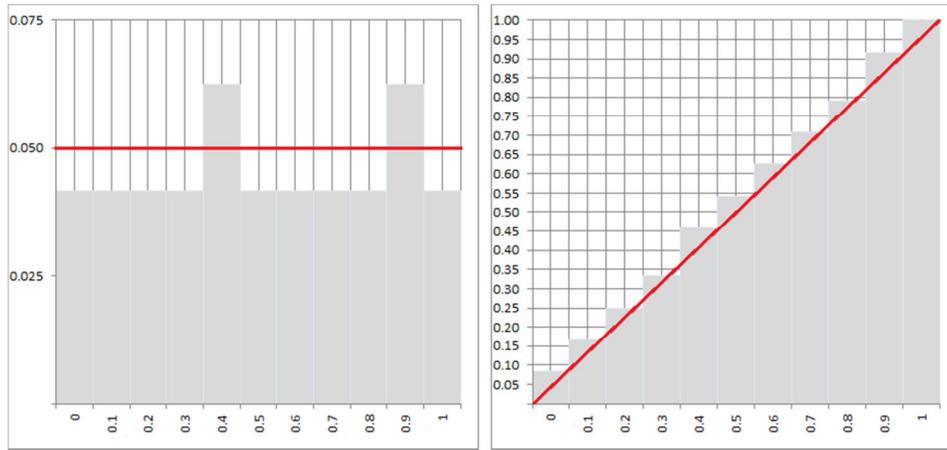


Figura 15. Histograma, distribución empírica y sus funciones teóricas de densidad y distribución acumulada de los valores transformados (Serie III)

En complemento a los gráficos de dispersión de las Series I y II contenidos en la Figura 10, los siguientes dos pares de gráficos ilustran la dispersión de las Series I y III (Figura 16) y de las Series II y III (Figura 17).

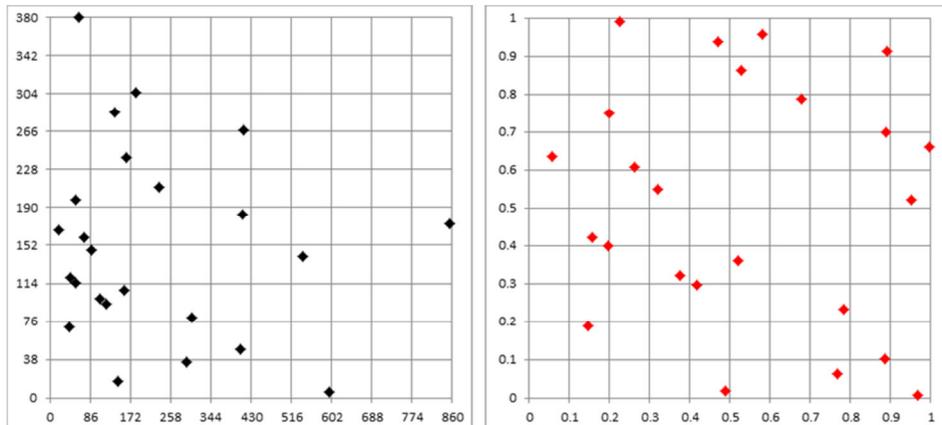


Figura 16. Gráficos de dispersión de los datos originales (izquierda) y transformados (derecha) de la Serie I (horizontal) contra la Serie III (vertical)

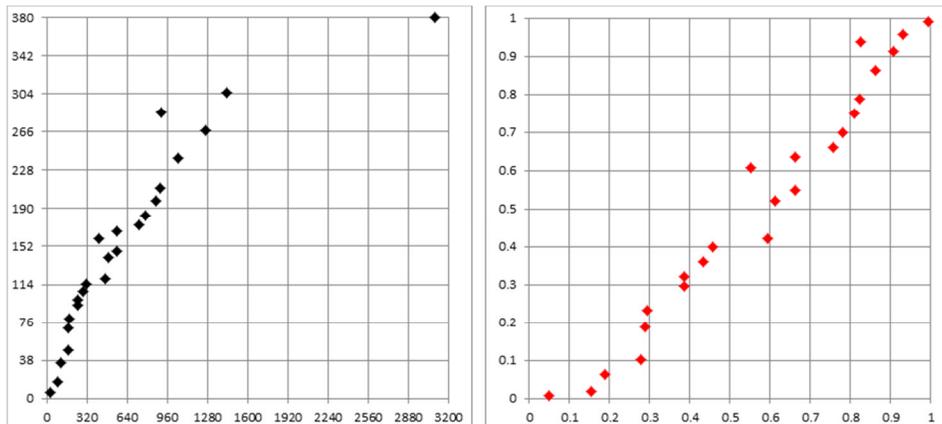


Figura 17. Gráficos de dispersión de los datos originales (izquierda) y transformados (derecha) de la Serie II (horizontal) contra la Serie III (vertical)

Asimismo, la Figura 18 muestra los gráficos de dispersión de los rangos (posiciones de orden) de las series I y II, I y III, y II y III, respectivamente.

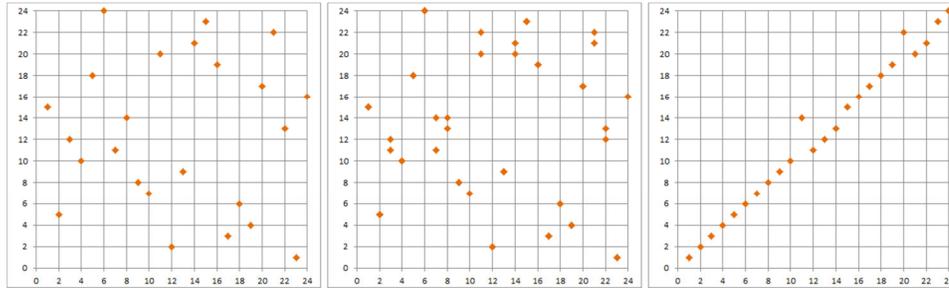


Figura 18. Gráficos de dispersión de los valores de rango (orden) de las Series I (H) & II (V) (izq.); I (H) & III (V) (centro); y II (H) & III (V) (der.)

Ambos tipos de gráficos ilustran, tanto la escasa dependencia existente entre la Serie I y las otras (Series II y III), como el alto grado de dependencia que priva entre estas dos últimas. La Tabla 1 sintetiza los cálculos de los coeficientes de correlación lineal de Pearson para los datos originales y transformados, y de rango de Spearman (válido en ambos casos en virtud de la monotonicidad de las funciones utilizadas en la transformación).

Coeficiente de correlación lineal de Pearson		Coef. de correl. de rango de Spearman	
	<i>Datos originales</i>	<i>Datos transformados</i>	
II	-0.1119	-0.1111	II -0.0435
III	-0.1456	-0.122	III -0.0652
	I	I	I
	II	II	II
			0.9922

Tabla 1. Coeficientes de correlación de Pearson, sobre los datos originales (izq.) y los datos transformados (centro), y de rango de Spearman (der.)

Si se denotan por $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\{y_1, \dots, y_n\}$ y $\{z_1, \dots, z_n\}$ a las Series I, II y III de indicadores, el primer paso consiste en transformar cada serie bajo la f.d. (ajustada) de cada una de ellas para obtener las correspondientes series transformadas $\{u_1, \dots, u_n\}$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, \dots, w_n\}$. De acuerdo con la discusión realizada en las secciones anteriores, si cada serie original corresponde a una muestra aleatoria de su indicador de riesgo y las ff.dd. marginales ajustadas son continuas, cada serie transformada tendría distribución uniforme $U(0, 1)$.

A manera de un primer ejercicio para modelizar la dependencia entre los indicadores, se realiza el ajuste de las cópulas gaussiana y t de Student descritas en el Anexo III¹⁰. La Tabla 2 contiene las estimaciones de las matrices de correlación ρ para ambas cópulas. La estimación de grados de libertad ν para la cópula t de Student resultó igual a 49.97.

Coeficiente de correlación de Pearson			
	<i>Cópula Gaussiana</i>	<i>Cópula t de Student</i>	
II	-0.0455	II	-0.1136
III	-0.0682	III	-0.1329
	I	I	I
	II	II	II
			0.9941

Tabla 2. Estimaciones de los parámetros de correlación de las cópulas Gaussiana y t de Student

¹⁰ La estimación de los parámetros de las cópulas se llevó a cabo mediante pseudo-máxima verosimilitud con ayuda del paquete estadístico R (<http://cran.r-project.org/>)

Los resultados contenidos en las tablas 1 y 2 indican niveles de dependencia distintos entre el cálculo directo sobre las series originales y los inducidos por el ajuste de las cópulas a los datos homogeneizados. La diferencia más importante se tiene para la correlación lineal entre las series II y III, donde las estimaciones bajo las cópulas gaussianas y *t* de *Student* indican mayores niveles de dependencia. En el caso de la correlación lineal de la serie I con el resto, la cópula *t* presenta resultados más alineados con los obtenidos sobre los datos homogeneizados. Las implicaciones de estas observaciones sobre el comportamiento de indicadores agregados construidos a partir de las series analizadas pueden tener impactos significativos, por ejemplo, en la generación de escenarios futuros a nivel de indicadores individuales y agregados.

Los datos de los indicadores originales, sus correspondientes valores transformados, sus conversiones a rangos y los valores de los indicadores agregados ejemplificados están contenidos en el Anexo IV.

11. Conclusiones

Entre las diferentes fases del modelo de gestión del riesgo operacional generalmente aceptado¹¹, quizá la relativa al seguimiento del riesgo a través de la monitorización de variables presuntamente vinculadas a éste, sea la más rezagada en la industria financiera¹².

Las dificultades saltan a la vista. Los aplicativos no fueron diseñados con ese propósito e introducir en ellos la funcionalidad para identificarles y registrarles de manera sistemática resulta costoso y, por supuesto, muy difícil de vender a sus titulares. Sortear esta limitante por la vía de la minería de datos sobre extensos y variados repositorios o mediante la observación *in situ* y el cálculo aislado y frecuentemente manual, a través de un copioso equipo de analistas diseminado en toda la organización desincentiva su producción regular y cuestiona su fiabilidad y repetibilidad. La condicionante subyacente de registrar sólo lo que es visible y no lo que, estando oculto, resulta pertinente, deviene en ingeniería de lo obvio. Y, más aún, el descubrimiento, luego del vasto esfuerzo desplegado, de la escasa capacidad predictiva de los parámetros utilizados en su confección. Todo ello deja seriamente en entredicho la vialidad del ejercicio.

Los autores de esta nota técnica estamos convencidos de que una buena gestión del riesgo operacional sólo es asequible en la medida en que se disponga de información acerca de las variables que explican, condicionan, y eventualmente anticipan la exposición de la entidad a contingencias en su operación. Por ello, nos planteamos el objetivo de hacer una contribución, aunque modesta, a la solución de uno de los múltiples problemas que plantea el fortalecimiento del herramental para la confección de indicadores de seguimiento del riesgo, más predictivos y confiables.

El lidiar con la multiplicidad de métricas implicadas en un vasto colectivo de indicadores de seguimiento del riesgo, de la mano de sus dificultades interpretativas y de sintetización inherentes, es una de las muchas dificultades a sortear en la encomienda. La introducción de una medida homogénea que les reemplace al tiempo del análisis y la agregación, resulta por tanto insoslayable. Asimismo, la puesta en correspondencia ya no sólo de los indicado-

¹¹ Identificación/ evaluación de los riesgos; jerarquización y aplicación de controles y medidas de mitigación; diseño e identificación de indicadores de seguimiento del riesgo y de sus controles; acopio riguroso de datos internos/ externos de eventos de pérdida; y modelización del capital económico.

¹² No es el caso de otras industrias, como por ejemplo, química –en sus múltiples variantes–, aeronáutica, espacial, generación de energía nuclear, y otras en las que la conciencia del riesgo entre sus plantillas es considerablemente mayor en la medida de la gravedad de sus consecuencias.

res entre sí, sino con otras variables del modelo de gestión resulta conveniente –sino indispensable.

Es a allanar esta pequeña porción de la intrincada geografía del modelo de gestión que va orientada la propuesta contenida en esta nota, con la intención de someterle al escrutinio de la comunidad de especialistas y gestores del riesgo y a la validación de su utilidad en el advenimiento de mejores herramientas de análisis y prospección.

Hacer comparables las variables ligadas a las causas de incidentes operacionales, a los efectos de sus controles y al desempeño de sus resultados –como una de las consecuencias del mecanismo de homogeneización propuesto– es, en nuestra opinión, un recurso explorable en el fortalecimiento de los métodos de análisis. Su consecución esperamos habrá de contribuir a potenciar la parte del modelo de gestión que explique, anticipe y, consecuentemente, reduzca el impacto de los riesgos operacionales en la gestión del negocio.

De así ocurrir, habrá de repercutir en un mejor modelo de gestión, en un mayor lucimiento de la cuenta de resultados y en el fortalecimiento de la imagen de la entidad de cara a su propia plantilla, a sus clientes e inversionistas, y al propio supervisor, responsable último del aseguramiento de la solvencia del sistema en su conjunto.

12. Referencias

Cambanis, S., S. Huang y G. Simons (1981). On the theory of elliptically contoured distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 11, pp. 368-385.

Embrechts, P., C. Klüppelberg y T. Mikosch (1997). “Modelling Extremal Events for Insurance and Finance”, Springer Verlag, Berlín.

Embrechts, P., A.J. McNeil y D. Straumann (2002). Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls. En *Risk Management: Value at Risk and Beyond* (ed. M. Dempster), pp. 176-223. Cambridge University Press.

Embrechts, P., A.J. McNeil y R. Frey (2005). “Quantitative Risk Management”. Princeton Series in Finance, USA.

Fang, K.T, S. Kotz y K.W. Ng (1990). “Symetric Multivariate and Related Distributions”. London: Chapman & Hall.

Kruskal, W.H. (1958). Ordinal measures of association. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 53, pp. 814-861.

Marsland, S. (2009). “Machine Learning: an algorithmic perspective”, Chapman & Hall.

Schweizer, B. y A. Sklar (1983). “Probabilistic Metric Spaces”. New York: North-Holland/Elsevier.

Anexo I: Distribución uniforme de valores de funciones de distribución acumulada

En este apartado se incluye un resultado estándar sobre el comportamiento probabilista de la función de distribución de una variable aleatoria (v.a.). Para ello, considérese una v.a. X cualquiera cuya función de distribución (f.d.) está dada por F . Además, si F^{-1} denota la inversa generalizada de F , entonces, la función $F^{-1}(u) = \inf\{x|F(x) \geq u\}$.

Para el caso en que F es continua, se puede verificar que F^{-1} es estrictamente creciente, por lo que para cualquier $0 < u < 1$,

$$P\{F(x) \leq u\} = P\{F^{-1}(F(X)) \leq F^{-1}(u)\} = P\{X \leq F^{-1}(u)\} = F(F^{-1}(u)),$$

donde la primera igualdad se satisface por el hecho de que F^{-1} es estrictamente creciente, la segunda se satisface porque $P\{F^{-1}(F(X)) = X\} = 1$, en tanto que la última igualdad se obtiene por ser F la f.d. de X .¹³

Finalmente, la continuidad de F nos permite escribir $F(F^{-1}(u)) = u$, y por lo tanto,

$$P\{F(X) \leq u\} = u, \tag{A1}$$

es decir, la v.a. $F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, es decir, $F(X) \sim U(0, 1)$.

Es importante mencionar que en el caso en que F no es continua, la inversa generalizada F^{-1} no es estrictamente creciente y, en consecuencia, las desigualdades $F^{-1}(F(x)) \leq x$ y $F(F^{-1}(u)) \leq u$ se pueden dar de manera estricta para ciertos valores de x y u , por lo que la igualdad en la ecuación (A1) no se puede garantizar. Esta observación justifica el uso de distribuciones continuas para poner en correspondencia las métricas de los indicadores de riesgo con un intervalo entre 0 y 1 con un comportamiento distribucional uniforme.

¹³ Estos resultados básicos se pueden encontrar, por ejemplo, en el Lema A.2. y Proposiciones A.3. y A.4. de Embrechts et al (2005).

Anexo II: Coeficiente de correlación de Spearman entre valores de funciones de distribución acumulada

En esta sección se analizan las bondades del uso de la correlación de rango de Spearman como medida de dependencia para capturar las interacciones entre parejas de indicadores de riesgo. El concepto de correlación lineal juega un papel central en la teoría financiera, particularmente por su directa conexión con la distribución normal multivariada y su uso como medida natural para describir relaciones lineales entre variables. Sin embargo, cuando las estructuras de dependencia vienen dadas por estructuras más complejas y alineadas con los comportamientos de los mercados en situaciones de estrés, las desventajas de la correlación lineal como medida de dependencia se ponen de manifiesto y surge la necesidad de utilizar medidas alternativas.

Definición. La correlación lineal entre dos vv.aa. X_1 y X_2 se define como

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}},$$

y constituye una medida de dependencia lineal que toma valores en el intervalo $[-1, 1]$. Si X_1 y X_2 son independientes entonces $\rho(X_1, X_2) = 0$, pero la implicación a la inversa no es cierta en general¹⁴. Además, se puede verificar que X_1 y X_2 dependen de manera lineal perfecta, es decir, $X_2 = a + bX_1$ casi seguramente para alguna $a \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, si y sólo si $|\rho(X_1, X_2)| = 1$. Asimismo, la correlación lineal es invariante bajo transformaciones lineales estrictamente crecientes, es decir, para reales $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $b_1, b_2 > 0$ se mantiene la relación $\rho(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = \rho(X_1, X_2)$.

No obstante las propiedades mencionadas sobre la correlación lineal, conviene señalar algunas de sus deficiencias, entre las que se encuentra el hecho de que no es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes no lineales $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ya que, en general, $\rho(T(X_1), T(X_2)) \neq \rho(X_1, X_2)$. Debe tenerse presente, además, que la correlación lineal sólo está definida para vv.aa. con varianza finita. Esta última restricción a modelos de varianza finita puede causar problemas cuando se requiere medir dependencia entre variables aleatorias en situaciones específicas, como en el caso de distribuciones de colas pesadas¹⁵.

Además de las desventajas mencionadas en el párrafo anterior, existen otros aspectos relacionados con el uso de la correlación lineal que permiten establecer sus deficiencias como medida de dependencia, los cuales vale la pena precisar.

El primer aspecto tiene que ver con el hecho de que en general, la distribución conjunta de un vector aleatorio no queda completamente determinada por las distribuciones marginales y las correlaciones entre parejas de sus componentes.

En el contexto de la distribución normal multivariada, y más generalmente, en el caso de las distribuciones elípticas, este problema no se presenta ya que las distribuciones multivariadas de estas familias quedan completamente determinadas por un vector de medias, una

¹⁴ Como contraejemplo, considérese el caso en que $X_1 = Z$ y $X_2 = |Z|$, donde Z es una v.a. normal estándar. Se puede verificar de manera directa que $E[X_1X_2] = E[X_1] = 0$, con lo que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ y en consecuencia $\rho(X_1, X_2) = 0$. Sin embargo, por construcción, X_1 y X_2 no son independientes.

¹⁵ Este tipo de distribuciones son particularmente importantes, por ejemplo, en el caso del análisis de las pérdidas en diferentes líneas de negocios en el sector asegurador cuyas distribuciones subyacentes tienen varianza infinita. En tales situaciones, el uso de la correlación lineal no puede describir la dependencia entre las líneas de negocio. El caso de las pérdidas por riesgo operacional no es muy diferente, ya que el comportamiento de muchos tipos de pérdidas sugiere el uso de distribuciones con colas pesadas.

matriz de varianza-covarianza y una función generadora característica. Entonces, dado que las medias y varianzas son características de las distribuciones marginales, la estructura de multivariada depende esencialmente de la matriz de correlaciones y el generador característico. Sin embargo, para situaciones fuera del mundo elíptico, la matriz de correlaciones falla en describir completamente el comportamiento conjunto de las variables aleatorias, especialmente en lo relativo a los efectos de las pérdidas (extremas) conjuntas que tienen un peso importante en las pérdidas agregadas¹⁶.

Un segundo aspecto no menos importante, tiene que ver con el hecho de que dado un nivel de correlación arbitrario $\rho \in [-1, 1]$ y dos distribuciones univariadas cualesquiera F_1 y F_2 , no siempre es posible encontrar alguna distribución conjunta F con marginales F_1 y F_2 y correlación ρ . De nuevo, este inconveniente no se presenta en el mundo elíptico que incluye al caso normal). Esta situación es de particular relevancia en el caso en que dos vv.aa. tienen niveles de correlación muy pequeños pero son comonóticas, es decir, tienen dependencia positiva perfecta en el sentido de que son –casi seguramente– funciones estrictamente crecientes una de otra. Dado que la comonotividad es la forma de dependencia positiva más fuerte, esto provee una corrección al tradicional punto de vista que asocia niveles de correlación lineal pequeños con dependencia débil¹⁷.

La conclusión que de las observaciones anteriores se desea resaltar apunta en dos direcciones: 1) el concepto de correlación carece de significado a menos que se aplique bajo el contexto de un modelo multivariado bien definido; y 2) cualquier interpretación de los valores de la correlación en ausencia de tal modelo debiera ser evitado.

Siguiendo las implicaciones de los comentarios precedentes, puede encontrarse en la literatura que se han propuesto alternativas a la correlación lineal para capturar la dependencia en contextos más generales. Las correlaciones de rango constituyen medidas de dependencia simples resultantes de la cópula de una distribución bivariada y no de las distribuciones marginales, a diferencia de la correlación lineal. Los estimadores empíricos de las correlaciones de rango, generalmente se calculan a partir de los rangos de los datos, es decir, solamente es necesario conocer el orden en que se presentan las observaciones de la muestra y no sus valores en sí mismos. Son dos las medidas principales que pertenecen a las correlaciones de rango: la correlación *tau* de Kendall y la *ro* de Spearman.

Definición 1. Dadas dos vv.aa. X_1 y X_2 , se define la *tau* de Kendall como

¹⁶ Por ejemplo, supóngase la modelización de dos tipos de pérdidas mediante las vv.aa. X_1 y X_2 con distribuciones marginales continuas F_1 y F_2 , respectivamente, y una f.d. conjunta dada por $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$ para alguna cópula (véase Anexo III) C , tal que la correlación lineal entre las variables es $\rho(X_1, X_2) = \rho$. Entonces es posible construir un vector aleatorio (Y_1, Y_2) con f.d. $C^*(F_1(x_1), F_2(x_2))$ y correlación $\rho(Y_1, Y_2) = \rho$ tal que $C^* \neq C$. El problema evidente con esta situación es que ambos modelos, (X_1, X_2) y (Y_1, Y_2) , indican un mismo nivel de correlación lineal entre las pérdidas, pero las estructuras de dependencia que inducirían C y C^* pueden derivar en comportamientos totalmente distintos a nivel de pérdidas agregadas en el área de las colas para las distribuciones subyacentes de $X_1 + X_2$ y $Y_1 + Y_2$ (riesgos agregados).

¹⁷ Resultados como la denominada fórmula de Höfding y las propiedades de correlaciones realizables (ver Lema 5.24 y Teorema 5.25 de Embrechts et al, 2005) permiten construir ejemplos específicos donde dadas dos distribuciones marginales, las correlaciones posibles de cualesquiera distribuciones conjuntas con tales marginales solamente pueden tomar valores en cierto intervalo $[\rho_{min}, \rho_{max}]$, donde $\rho_{min} < 0 < \rho_{max}$ pueden hacerse tan pequeñas cercanas a cero como se desee, con la premisa de que el valor ρ_{min} se alcanza cuando las variables aleatorias en cuestión tienen dependencia negativa perfecta (contramonotividad) y el nivel ρ_{max} se obtiene para el caso de dependencia positiva perfecta (comonotividad).

$$\rho_r(X_1, X_2) = E\{\text{signo}[(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2)]\},$$

donde $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ es una copia independiente de (X_1, X_2) . Esta definición se puede escribir también en términos de concordancia y discordancia¹⁸.

La segunda medida de correlación de rango a discutir es la *ro* de Spearman, la cual también se puede definir en términos de la concordancia y la discordancia de dos parejas aleatorias (ver Kruskal, 1958), sin embargo, una manera más intuitiva es la siguiente:

Definición 2. Para dos vv.aa. X_1 y X_2 con distribuciones marginales F_1 y F_2 , se define la *ro* de Spearman como

$$\rho_s(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$

Es decir, la *ro* de Spearman es simplemente la correlación lineal de las variables transformadas bajo su f.d. (transformación-probabilidad), la cual para vv.aa. continuas es la correlación lineal de su única cópula asociada.

Las dos correlaciones de rango que se han definido tienen muchas propiedades importantes en común. Ambas son medidas de dependencia simétrica que toma valores en el intervalo $[-1, 1]$. Toman el valor cero cuando las vv.aa. son independientes, al tiempo que una correlación de rango igual a cero no implica independencia. En contraste con la correlación lineal, siempre toman el valor 1 cuando las vv.aa. son comonóticamente y el valor -1 cuando son contramonóticamente.

Una característica fundamental que diferencia a las correlaciones de rango con la correlación lineal es la intrínseca relación que tienen con la cópula asociada al vector aleatorio en estudio. Más precisamente, dadas dos vv.aa. X_1 y X_2 con marginales continuas y cópula C , las correlaciones de rango satisfacen

$$\begin{aligned}\rho_r(X_1, X_2) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \\ \rho_s(X_1, X_2) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2\end{aligned}$$

No obstante que al igual que la correlación lineal, las distribuciones marginales y las correlaciones de rango no determinan completamente la distribución conjunta de un vector de riesgos, una característica positiva de las dos correlaciones de rango definidas es que siempre es posible especificar una distribución bivariada que tenga cualquier valor de correlación de rango en el intervalo $[-1, 1]$.

Para los propósitos de este documento de investigación, como alternativa a la correlación lineal para capturar la dependencia entre indicadores de riesgo operacional, el uso de la *ro* de Spearman se pone de manifiesto por las propiedades de las correlaciones de rango mencionadas, así como por la idoneidad de su cálculo dada la técnica de homogeneización propuesta mediante la distribución acumulada de probabilidades.¹⁹

¹⁸ Dicha ecuación representa la probabilidad de concordancia entre las dos parejas menos su probabilidad de discordancia, es decir, $P\{(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0\} - P\{(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0\}$. Si X_1 tiende a incrementar con X_2 , entonces es de esperar que la probabilidad de concordancia sea relativamente mayor a la probabilidad de discordancia; si X_1 tiende a decrecer cuando X_2 se incrementa, se esperaría un comportamiento opuesto.

¹⁹ El lector puede referirse a Embrechts et al (2002) para consultar ejemplos específicos sobre los problemas asociados a la correlación lineal y sus implicaciones en la administración de riesgos.

Anexo III: El uso de cópulas para describir la dependencia entre variables aleatorias

En esta sección se precisan la noción del concepto general de cópula y el uso a darle como mecanismo para modelizar las interacciones y estructura de dependencia de los indicadores de riesgo operacional de manera consistente con la homogeneización de sus métricas nativas bajo el uso de la función de distribución acumulada.

Partiendo de la noción general de que la función de distribución conjunta de un vector aleatorio implícitamente contiene, tanto la descripción del comportamiento marginal de cada componente individual, como la información relativa a su estructura de dependencia, surge la cópula como una estrategia para aislar la descripción de la estructura de dependencia. Siendo una de las varias formas de modelizar la dependencia en un contexto multivariado, es tal vez la manera más natural de abordar el problema en un contexto estático.

Entre las razones principales para hacer uso de esta herramienta, puede decirse que las cópulas permiten entender la dependencia a un nivel profundo del comportamiento probabilista de las variables. Esto permite resolver muchos de los inconvenientes que presentan los modelos que sólo se enfocan en la correlación lineal, y explotar la cercana relación que guarda con las correlaciones de rango.

Otra razón de consideración es la facilidad que proporcionan para la construcción de modelos multivariados de “abajo-hacia-arriba” (*bottom-up*), particularmente útiles en la medición y agregación de riesgos.

La siguiente definición precisa el concepto de cópula.

Definición 3. Una cópula d -dimensional es una función de distribución sobre $[0, 1]^d$ con marginales uniformes estándar.

La notación usual para cualquier función de distribución que sea una cópula es $C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_d)$. A partir de la definición anterior, se puede entender a C como una puesta en correspondencia $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ que satisface las propiedades

- (1) $C(u_1, \dots, u_d)$ es creciente en cada componente u_i ;
- (2) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ para toda $i \in \{1, \dots, d\}, u_i \in [0, 1]$;
- (3) Para toda $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ con $a_i \leq b_i$,

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0,$$
donde $u_{j1} = a_j$ y $u_{j2} = b_j$ para todo $j \in \{1, \dots, d\}$.

La importancia de las cópulas en el estudio de las distribuciones multivariadas se evidencia con el siguiente resultado²⁰.

Teorema (Sklar, 1959). Sea F una f.d. conjunta con marginales F_1, \dots, F_d . Entonces existe una cópula $C: [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ tal que para toda x_1, \dots, x_d en $(-\infty, \infty)$,

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (\text{A3})$$

Si las marginales son continuas, entonces C es única; en otro caso C está determinada de manera única sobre $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_d$, donde $\text{Ran}F_i$ denota al rango de F_i . Recíprocamente, si C es una cópula y F_1, \dots, F_d son ff.dd. univariadas, entonces la función F definida en (A3) es una f.d. conjunta con marginales F_1, \dots, F_d .

²⁰ La demostración de este resultado estándar para cópulas se puede revisar en Schweizer and Sklar (1983).

Este resultado establece que todas las ff.dd. tienen asociada alguna cópula, y que las cópulas en combinación con las ff.dd. univariadas se pueden utilizar para construir ff.dd. multivariadas. Al respecto, la ecuación (A3) proporciona dicho mecanismo de acoplamiento. En el caso que la cópula es única, se deriva su representación explícita en términos de la distribución conjunta F y sus marginales, mediante la ecuación

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad (\text{A4})$$

La ecuación anterior ofrece una estrategia de construir cópulas a partir de las distribuciones multivariadas y las inversas generalizadas de las marginales. Este tipo de cópulas se conocen como cópulas implícitas. Dos ejemplos relevantes que son utilizados en el documento para fines ilustrativos en la sección del ejercicio empírico son la cópula gaussiana y la cópula t de Student.

Cópula Gaussiana:

$$C_P^{Ga}(\mathbf{u}) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)), \quad (\text{A5})$$

donde Φ^{-1} denota a la función inversa de la f.d. normal estándar univariada y Φ_P es la distribución conjunta de $X \sim N_d(\mathbf{0}, P)$ un vector aleatorio normal con vector de medias cero y matriz de correlaciones P .

Cópula t de Student:

$$C_{v,P}^t(\mathbf{u}) = \mathbf{t}_{v,P}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)), \quad (\text{A6})$$

Donde t_v^{-1} representa a la función inversa de la distribución t de Student univariada con v grados de libertad y $\mathbf{t}_{v,P}$ corresponde a la f.d. conjunta de $X \sim t_d(v, \mathbf{0}, P)$ un vector aleatorio con distribución t de Student multivariado con vector de medias cero, matriz de correlaciones P y v grados de libertad.

Las cópula gaussiana, y en particular la distribución normal (en una o varias dimensiones) representa una de las familias paramétricas más utilizadas en finanzas cuantitativas. Sin embargo, presenta varias desventajas cuando se requiere modelizar la dependencia conjunta extrema entre los componentes de un vector de riesgos. Al respecto, la cópula t de Student presenta una alternativa para capturar estos efectos. Siendo que ambas cópulas pertenecen a las cópulas elípticas²¹, su estructura de dependencia queda completamente determinada por su matriz de correlaciones P (y el índice de grados de libertad en el caso de la cópula t).

Como se ha mencionado en el documento, no es objetivo fundamental de la metodología propuesta lograr el mejor ajuste de la distribución multivariada subyacente de los indicadores de riesgo analizados, sino la definición de un marco formal para la homogeneización de las métricas de distintos indicadores.

²¹ Una cópula elíptica es la cópula asociada a un vector multivariado con distribución elíptica. Este tipo de distribuciones han sido estudiadas ampliamente por Cambanis et al (1981) y Fang et al (1990), entre otros.

Anexo IV: Datos

Período	Series Originales			Series Transformadas			Series de Rangos			S_Pond I & II	Max I & II
	I	II	III	I	II	III	I	II	III		
P01	598	31	6	0.968	0.0494	0.0076	23	1	1	0.325	0.968
P02	44	463	120	0.157	0.5938	0.4225	3	12	11	0.4627	0.5938
P03	158	292	107	0.5192	0.4341	0.3596	13	9	9	0.4596	0.5192
P04	89	558	147	0.3199	0.6611	0.5492	8	14	13	0.5588	0.6611
P05	414	1,269	267	0.8896	0.9069	0.9129	21	22	21	0.9017	0.9069
P06	146	89	17	0.4885	0.1538	0.0189	12	2	2	0.2542	0.4885
P07	303	180	80	0.7835	0.2942	0.2323	18	6	6	0.441	0.7835
P08	72	412	160	0.2617	0.5519	0.6063	7	11	14	0.4648	0.5519
P09	62	3,088	380	0.2255	0.9942	0.9918	6	24	24	0.7636	0.9942
P10	120	250	94	0.4165	0.3854	0.2973	10	7	7	0.3947	0.4165
P11	412	790	183	0.8882	0.7805	0.6979	20	17	17	0.8128	0.8882
P12	291	110	36	0.7679	0.1886	0.0631	17	3	3	0.3624	0.7679
P13	19	559	167	0.0555	0.6618	0.6355	1	15	15	0.4799	0.6618
P14	106	251	99	0.3744	0.3866	0.3211	9	8	8	0.3829	0.3866
P15	54	314	115	0.1956	0.4579	0.3983	4	10	10	0.3792	0.4579
P16	41	175	70	0.1451	0.2872	0.1883	2	5	5	0.2446	0.2872
P17	407	169	48	0.8847	0.2786	0.102	19	4	4	0.4605	0.8847
P18	162	1,046	240	0.5291	0.8621	0.8638	14	21	20	0.7622	0.8621
P19	233	908	210	0.678	0.8231	0.7876	16	19	19	0.7796	0.8231
P20	541	488	141	0.9523	0.6128	0.5219	22	13	12	0.7146	0.9523
P21	139	913	285	0.4699	0.8247	0.937	11	20	22	0.7183	0.8247
P22	55	867	198	0.1994	0.8094	0.7502	5	18	18	0.6264	0.8094
P23	855	732	173	0.9956	0.7556	0.6597	24	16	16	0.8276	0.9956
P24	184	1,434	305	0.5804	0.9298	0.957	15	23	23	0.825	0.9298